Les mathématiques de l'identification

Mathieu Anel

ERC project Philosophy of Canonical Quantum Gravity
Laboratoire SPHERE - UMR 7219
CNRS - Université Paris Diderot

—

18 février 2016

Exposé au séminaire (Id)entité::(Id)entification

Plan

On va expliquer quelles sont les notions mathématiques qui permettent de formaliser les identifications entre objets.

Ce sont essentiellement les notions suivantes :

- Égalité
- Équivalence
- Groupes
- Règle de trois
- Groupoïde
- et Type

ÉGALITÉ ET ÉQUIVALENCE

Égalité

En arithmétique pour des nombres $2 + 2 = 4$,
ou en géométrie pour des points $M = N$,
ou des droites $(AB) = (CD)$,

l'identification se fait par la relation d'égalité.

Le mot relation souligne que l'égalité des objets est une propriété d'une paire d'objets (par opposition à une structure).

Paradoxe !

En fait, si on regarde bien (par exemple, en prenant au sérieux les notations!), on remarque que la notion d'égalité est paradoxale.

En arithmétique les deux membres de l'égalité $2 + 2 = 4$ ne sont clairement pas les mêmes.

Pas plus en géométrie si j'écris $M = N$ ou $(AB) = (CD)$.

Comment résoudre cela ?

Nombres et formules

D'abord quelques remarques:

- le nombre $2+2$ et la droite (AB) sont désignés par des formules, c'est-à-dire construits à partir de données primitives (2, A, B) et d'opérations ($+$, (..)) pour les combiner
- les deux membres des égalités sont des formules différentes
- l'égalité concerne le résultat de ces constructions, c'est-à-dire oubli la formule elle-même.

Comment bien penser tout cela ?

Déploiement des identités

Dans un ensemble, la seule chose qu'on puisse dire sur les éléments se résume à deux types de phrases :

$$2 = 2 \qquad \text{ou} \qquad 2 \neq 3.$$

Pour échapper à ces trivialités, il faut déployer les nombres en des ensembles de formules, c'est-à-dire déployer l'identité de chaque nombre en un système de choses différentes.

Soit F l'ensemble des formules arithmétiques. Toute formule a une valeur numérique: $val : F \to \mathbb{N}$.

Chaque nombre n est ainsi déployé en sa fibre $F_n = val^{-1}(n)$.

Résolution

Pour résoudre le paradoxe, il faut distinguer l'égalité des nombres (intrinsèque à $\mathbb{N}$) de l'égalité des formules (intrinsèque à F).

Le paradoxe de $2+2=4$ provient du fait qu'on emploie l'identité dans $\mathbb{N}$ pour des objets dans F.

Le véritable sens de $2+2=4$ est

$$val(2+2) = val(4).$$

Équivalence

On peut aussi transférer à F le critère d'identification de $\mathbb{N}$.

On dit que deux formules sont équivalentes ($\simeq$) si elles ont la même valeur.

$$f \simeq f' \iff val(f) = val(f')$$

Le véritable sens de $2 + 2 = 4$ peut aussi s'écrire

$$2 + 2 \simeq 4.$$

(Rien de bien profond derrière ça, l'écriture $2 + 2 = 4$ est typique du genre d'abus de notations que font les mathématiciens.)

La double identité des nombres

Tout nombre est une formule pour lui-même, donc $val : F \to \mathbb{N}$ est surjectif.

On peut identifier $\mathbb{N}$ à l'ensemble des fibres de val

$$n \quad \leftrightarrow \quad F_n,$$

c'est-à-dire on identifie un nombre à l'ensemble des formules de valeur ce nombre.

Mais c'est précisément ça qui crée la confusion et les paradoxes ! Alors il faut surtout éviter.

L'identité double des formules

La structure de l'ensemble F des formules est donc d'avoir deux notions d'identification:

$$\text{l'égalité } = \qquad \text{et} \qquad \text{l'équivalence } \simeq .$$

Comment encoder formellement cela ?

Il faut une notion moins grossière que celle d'ensemble.

La réponse est bien connue, c'est la notion de relation d'équivalence ou d'ensembloïde.

Structure d'équivalence

Axiomatisation de la notion d'équivalence

- on se donne un ensemble d'éléments E
- et une structure d'équivalence $\simeq$
  - encodé par une relation binaire $\simeq \subset E \times E$ vérifiant
  - une propriété de transitivité (si $x \simeq y$ et $y \simeq z$ alors $x \simeq z$)
  - une propriété de réflexivité ($x \simeq x$ pour tout x)
  - une propriété de symétrie (si $x \simeq y$ alors $y \simeq x$)

Ensembloïdes

Un ensembloïde $\mathcal{E}$ est un ensemble E muni d'une structure d'équivalence $\simeq$. Les morphismes d'ensembloïdes doivent être compatibles aux équivalences.

Tout ensemble est un ensembloïde (pour lequel la relation $\simeq$ est prise comme étant l'égalité $=$).

Un ensembloïde $\mathcal{E}$ possède un quotient noté $|\mathcal{E}|$, définit comme l'ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\simeq$.

L'opération de quotient est l'adjoint à gauche de l'inclusion :

$$\{\text{Ensembles}\} \underset{\textit{inclusion}}{\overset{\textit{quotient}}{\rightleftarrows}} \{\text{Ensemblo\"ides}\}.$$

L'idée nommer ainsi les ensembloïdes sert à appuyer l'idée qu'ils sont une généralisation de la notion d'ensemble.

Espace de manipulation

Pour mieux comprendre la structure de l'arithmétique, il faut introduire l'ensembloïde $\mathcal{F} = (F, \simeq)$ des formules c'est-à-dire l'ensemble des formules F avec la relation d'équivalence $\simeq$.

De ce point de vue, les nombres ont disparu et ne sont accessibles que comme classes d'équivalence de formules.

On peut définir $\mathbb{N}$ à partir de $\mathcal{F}$ en posant

$$\mathbb{N} = |\mathcal{F}|.$$

Espace de manipulation

En introduisant $\mathcal{F}$, on a gagné quelque chose.

Appelons une action arithmétique le fait de remplacer une formule par une formule équivalente.

La structure de $\mathcal{F}$ par rapport à F peut se comprendre comme l'ajout des actions sur les formules. Ainsi, amélioré en $\mathcal{F}$, F devient un espace de manipulation.

C'est la différence entre ensembloïde et ensemble.

En ces termes, $\mathbb{N}$ est le quotient de $\mathcal{F}$ (ou de F) par toutes les actions possibles sur les formules.

Bilan

Si on met ensemble tout ce qui a été dit, on a

$$\underbrace{\simeq \; = F \times_{val} F}_{\text{Actions}} \rightrightarrows \underbrace{F}_{\text{Formules}} \xrightarrow{val} \underbrace{\mathbb{N} = |\mathcal{F}|}_{\text{Nombres}}$$

Les deux termes de gauche forment l'ensembloïde et déterminent celui de droite par quotient.

Les deux termes de droite forment le déploiement *val* et déterminent celui de gauche par transfert d'identité.

Registres d'identification

C'est en fait très souvent en maths qu'on a une dialectique entre deux registres d'identification (égalité et équivalence).

C'est parfois parce que les objets mathématiques peuvent être définis comme des classes d'équivalence ou des quotients.

- les éléments d'un objet algébrique comme classe d'équivalence de formules (générée librement via des éléments générateurs)
- une variété comme quotient d'atlas

$$\underbrace{\coprod U_i \cap U_j}_{\text{recollements}} \rightrightarrows \underbrace{\coprod U_i}_{\text{cartes}} \xrightarrow{val} \underbrace{|U| = X}_{\text{variété quotient}}$$

Registres d'identification

Mais parfois ces deux registres ont une autre origine :

- égalité et isomorphismes d'objets structurés
- égalité et chemins entre points d'un espace topologique

Parfois on a même trois registres d'identification, comme en théorie de l'homotopie : identité, isomorphisme, équivalence d'homotopie.

Transition

On a fait évoluer (assez naturellement et immédiatement, en fait) l'égalité en relation d'équivalence, c'est-à-dire la notion d'ensemble en celle d'ensembloïde.

Ça a permis de se débarrasser des paradoxes qui réduisent l'égalité à une tautologie.

Une autre dimension d'ouverture de la notion d'égalité est celle de groupe à travers la notion de symétrie, qui va nous amener vers la potentielle multiplicité des identifications (au sein d'un même registre) entre deux objets.

Transition

Elle est lié à un changement sémantique important : l'évolution de la notion d'éléments en la notion d'objet, c'est-à-dire la possibilité pour les éléments d'avoir une structure interne.

En donnant déjà le fin mot de l'histoire : il s'agit d'évoluer dans la direction

Ensemble	Élément	Égalité
Groupoïde (ou Catégorie)	Objet	Isomorphisme

GROUPES

Structure des auto-identifications

Alors que le problème de comparer deux objets me semble plus naturel, c'est le problème de l'auto-comparaison qui a d'abord été formalisé.

Cela se fait avec la notion de groupe.

Intuition fondamentale : un groupe est un ensemble de mouvements inversibles.

Exemples :

- symétries d'un objet : $Aut(X)$
- permutation d'un ensemble d'objet : $\Sigma(E)$
- opérations arithmétiques : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$
- mouvements d'un solide dans l'espace : $D(3)$

Structure des auto-identifications 2

Axiomatisation d'un groupe de mouvements :

- on se donne un ensemble de *mouvements* G
- structuré d'un mouvement distingué nommé *immobilité* (élément neutre) $e \in G$
- et d'une structure de composition des mouvements
  - engendrée par une loi binaire $m : G \times G \to G$ vérifiant
  - une propriété d'associativité qui assure qu'on a une seule composition n-aire $G^n \to G$
  - les propriétés donnant son sens à l'immobilité ($g = m(g, e) = m(e, g)$ pour tout mouvement $g \in G$)
  - et une propriété d'inversion qui assure que tout mouvement g a un mouvement inverse g^{-1}

Action de groupes

À quoi servent les groupes en maths ?

À agir sur d'autres objets.

Une action est un morphisme de groupes

$$G \longrightarrow Aut(X).$$

Ça veut dire que les mouvements de G font parties des symétries de l'objet X.

Le terme d'*action* est à comparer avec les *actions* définies avant sur les formules de l'arithmétique. On verra plus tard pourquoi.

Identité vs identification

Les symétries d'un objet X mettent à mal la notion d'égalité : une même chose peut être "auto-égale" de plusieurs façons.

En fait, cela met à mal la réflexivité de l'égalité. La propriété $X = X$ se retrouve déployée en une structure de groupe $Aut(X)$.

On peut aussi dire que l'identité de X est déployée en un ensemble d'identifications $Aut(X)$.

(Le thème du séminaire commence à prendre sens.)

Transition vers les inter-identifications

Je ne vais pas insister sur la notion de groupe. Elle est trop classique.

Elle déploie l'auto-identification des éléments (triviale) en l'auto-identification des objets (potentiellement très structurée).

Mais qu'en est-il des identifications entre deux objets différents ?

Transition vers les inter-identifications

Quelle est la structure des inter-identifications ?

Si A est un objet, la structure de $Aut(A) = Iso(A, A)$ est d'être un groupe.

Mais, si A et B sont deux objets, quelle est la structure de $Iso(A, B)$?

Transition - Inter-identifications

Il existe une réponse :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left=60, "y"] \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, bend right=60, "z"'] \arrow[r, dotted, bend right=90, "yx^{-1}z"'] & B \arrow[l, dashed, shift left, "x^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Mais qu'est-ce c'est ?

RÈGLE DE TROIS

Règle de trois

C'est la règle de trois !

La règle de trois est probablement le plus vieux truc de maths connu : "t est à z ce que y est à x". C'est une opération qui construit t à partir de x, y et z.

x	z
y	$t = y\bar{x}.z$

$y\bar{x}.z$ est un symbole qui veut suggérer les cas suivant

$$y\bar{x}.z \quad = \quad \frac{y}{x}z = yx^{-1}z \quad \text{ou} \quad (y-x)+z$$

Autrement dit, la structure de l'inter-identification est celle de la proportion.

Règle de trois

La règle de trois sert avec autre choses que des nombres.

En phonétique

$[p]$	$[b]$
$[f]$	$[v]$

Règle de trois

En anthropologie avec Levi-Strauss ($A : B :: C : D$)

La relation entre le donateur d'un partenaire sexuel et la progéniture ultérieure de celui-ci	la relation de consanguinité intergénérationnelle (entre parents et enfants, entre ascendants et descendants)
la relation de consanguinité intragénérationnelle entre germains	la relation d'affinité entre conjoints et/ou entre beaux-parents.

J'ai emprunté ça à Laurent Berger *Par-delà le structuralisme : Maurice Godelier, lecteur matérialiste de Claude Lévi-Strauss* https://gradhiva.revues.org/2995

(Mais je n'ai rien compris à ce que ça veut dire...)

Règle de trois

Et dans les titres de séminaire (ou plutôt l'imagination de Gabriel)

Identité	Identification
Entité	?

Règle de trois

Et dans les titres de séminaire (ou plutôt l'imagination de Gabriel)

Identité	Identification
Entité	Entification !

Règle de trois - Axiomes

Axiomatisation de la règle de trois

- on se donne un ensemble d'éléments T
- structuré d'une loi de composition ternaire $T^3 \to T$

$$(y, x, z) \mapsto y\bar{x}.z$$

  vérifiant les relations
  - (identité gauche) $x\bar{x}.z = z$
  - (identité droite) $y\bar{x}.x = y$
  - (associativité) $t\bar{s}.(y\bar{x}.z) = (t\bar{s}.y)\bar{x}.z$

La dernière formule permet d'écrire sans ambiguïté

$$t\bar{s}.y\bar{x}.z.$$

Règle de trois - Exemples

Il y a plein d'autres exemples de règles de trois :

- structure des espaces affines (règle du parallélogramme)
- tout groupe définit une règle de trois ($y\bar{x}.z = yx^{-1}z$)
- chemins entre deux points d'un espace (même formule que dans un groupe)
- espaces homogènes principaux (action de groupe libre et transitive)
- connexions affines (transport infinitésimal de vecteurs)

Règle de trois - Exemples

FAIRE LE DESSIN DU PARALLELOGRAMME
EN GÉOMÉTRIE AFFINE

ET DU THÉORÈME DE THALES
(le théorème de Thalès est une règle de trois entre rapports, comme dans l'exemple anthropologique)

Règle de trois - Variations

En fait, la structure de règle de trois est très versatile.

Nous allons voir que les structures suivantes sont équivalentes :

- règle de trois,
- espaces homogènes,
- distances effectives,
- et torseurs.

Règle de trois - Proportionalité

On définit sur T^2 la relation de proportionalité par

$$(x, y) \sim (z, t) \iff y\bar{x}.z = t.$$

C'est une relation d'équivalence.

On dira aussi que (x, y) et (z, t) ont la même proportion si $(x, y) \sim (z, t)$.

En géométrie affine, c'est la relation qui définit les vecteurs comme différences de points.

Règle de trois - Preuve équipollence est une équivalence

- (transitivité) $y\bar{x} \sim t\bar{z}$ et $t\bar{z} \sim b\bar{a} \Rightarrow y\bar{x} \sim b\bar{a}$
  car $b = t\bar{z}.a = y\bar{x}.z\bar{z}.a = y\bar{x}.a$,
- (réflexivité) $y\bar{x} \sim y\bar{x}$
  car $y = y\bar{x}.x$,
- (symétrie) $y\bar{x} \sim t\bar{z} \Rightarrow t\bar{s} \sim y\bar{x}$
  car $t\bar{z}.x = y\bar{x}.z\bar{z}.x = y\bar{x}.x = y$.

Règle de trois - Groupe de proportion

Le quotient $G = G(T) = T^2/\sim$ est un groupe.

Soit $[y\bar{x}]$ la classe de $y\bar{x}$, le produit de G est définit par

$$[y\bar{x}][t\bar{z}] = [(y\bar{x}.t)\bar{z}].$$

Les éléments de G sont appelés des proportions de T.
G est appelé le groupe de proportion de T.

Règle de trois - Preuve de la structure de groupe

Associativité

$$([y\bar{x}][t\bar{s}])[b\bar{a}] = [y\bar{x}.t\bar{s}.b.\bar{a}] = [y\bar{x}]([t\bar{s}][b\bar{a}])$$

Neutre Pour tous x, y on a $[x\bar{x}] = [y\bar{y}]$ car $x\bar{x}.y = y$. Le neutre de G est la classe $[x\bar{x}]$:

$$[x\bar{x}][t\bar{s}] = [(x\bar{x}.t)\bar{s}] = [t\bar{s}]$$

Inverse L'inverse de $[y\bar{x}]$ est $[x\bar{y}]$.

$$[y\bar{x}][x\bar{y}] = [y\bar{y}] \qquad \text{et} \qquad [x\bar{y}][y\bar{x}] = [x\bar{x}]$$

Règle de trois - Action des proportions

Le groupe de proportion G agit canoniquement sur T.

D'une certaine manière, tout est fait pour, l'action est définie par

$$[y\bar{x}]z = y\bar{x}.z \ .$$

Il faut vérifier que cela ne dépend pas du représentant. On utilise $[y\bar{x}] = [t\bar{s}] \iff y\bar{x}.s = t$ pour montrer

$$t\bar{s}.z = y\bar{x}.s\bar{s}.z = y\bar{x}.z \ .$$

Tous les axiomes sont évidents.

Règle de trois = Espaces principaux

Si un groupe G agit sur X de manière libre et transitive, on dit que X est un espace principal sous G.

Exemple: La droite affine est un espace principal sous $(\mathbb{R}, +)$

L'action du groupe de proportion G sur T est libre et transitive.

Toute règle de trois T est un espace principal sous son groupe de proportion.

La réciproque est vraie : tout espace principal définie une règle de trois par la formule

$$y\bar{x}.z = (\text{l'unique élément } g \text{ amenant } x \text{ sur } y).z \ .$$

Règle de trois = Distance à valeurs dans un groupe

Soit $(G, *, e)$ un groupe, une G-distance sur X est la donnée

- d'une application $d : X \times X \to G$ vérifiant
- (auto-distance triviale) $d(x, x) = e$
- (l'égalité triangulaire)

$$d(x, y) * d(y, z) = d(x, z)$$

- (séparation) $d(x, y) = d(x, z) \Rightarrow y = z$

On en déduit que $d(y, x) = d(x, y)^{-1}$.

Soit $d(X)$ l'image de d dans G, c'est un sous-groupe. Une G-distance est dite effective si $d(X) = G$.

Règle de trois = Distance à valeurs dans un groupe

Tout espace X principal sous G est muni d'une G-distance effective en posant

$$d(x, y) = \text{ l'unique élément envoyant } x \text{ sur } y.$$

Exemple : la droite affine (orientée) possède une $\mathbb{R}$-distance.

En fait, la réciproque est vraie : toute G-distance effective est un espace principal sous G.

Règle de trois = Torseurs

On appelle un torseur un ensemble T qui est de la forme $Iso(*, \star)$ pour deux objets dans une catégorie, c'est-à-dire un ensemble d'inter-identifications.

Il y a vraiment beaucoup beaucoup d'exemples de torseurs en mathématiques

- torseur de trivialisation de fibrés, de revêtements
- torseur de factorisation d'un polynôme
- périodes en théorie des motifs
- isomorphismes de foncteur fibres en théorie de Tannaka
- solution d'équations ($f = 0$) et en fait tout produit fibré (mais d'un point de vue homotopique)

Règle de trois = Torseurs

On va prouver que toute règle de trois est un torseur.

Plus précisément on va montrer que T et son groupe de proportion G font partie d'un groupoïde à deux objets.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop left, "G"] \arrow[r, bend left, "T"] & \star \arrow[loop right, "\bar{G}"] \arrow[l, bend left, "\bar{T}"] \end{tikzcd}$$

Règle de trois = Torseur

Étant donnée une règle de trois T

$$(y, x, z) \mapsto y\bar{x}.z \ .$$

On considère une copie $\bar{T}$ de T dont les éléments sont notés $\bar{x}$. Et on définit la règle de trois duale sur $\bar{T}$ en inversant les roles de y et z dans la loi.

$$(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}) \mapsto \bar{y}x.\bar{z} := \overline{z\bar{x}.y}.$$

(Pour retenir la formule, il est commode d'introduire la relation $\bar{\bar{x}} = x$ et de considérer que l'opération $x \mapsto \bar{x}$ est contravariante, comme la relation d'inversion dans un groupe.)

Règle de trois = Torseur

On définit le groupe de proportion dual comme $\bar{G} = G(\bar{T})$.
Les groupes G et $\bar{G}$ sont non-canoniquement isomorphes.

Notons $[\bar{y}x]$ les éléments de $\bar{G}$.

Tout élément $z \in T$ induit une bijection $G \xrightarrow{\sim} \hat{G}$

$$[y\bar{x}] \mapsto [\overline{x\bar{y}.z}z] = [(\bar{z}y.\bar{x})z].$$

Règle de trois = Torseur

Le groupe de proportion dual $\bar{G}$ agit (principalement) à droite sur T par la formule

$$y.[\bar{x}z] = y\bar{x}.z \ .$$

On en déduit que G agit à droite sur $\bar{T}$.

Tout mis ensemble, la donnée de T produit bien un groupoïde à deux éléments

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[loop left, "\bar{G}=Aut(*)"] \arrow[r, bend left, "T=Iso(*{,}\star)"] & \star \arrow[l, bend left, "\bar{T}=iso(\star{,}*)"] \arrow[loop right, "G=Aut(\star)"]
\end{tikzcd}$$

et la conclusion que toute règle de trois est un torseur.

Torseurs et Revêtements

Exemples de torseurs : Revêtements

Soit $R \to X$ un revêtement de fibre F.
Le torseur de trivialisation de R est le revêtement
$T = Iso_X(R, F \times X) \to X$ dont la fibre en x est $iso(R_x, F)$.

T est le domaine universel de trivialisation de R : toute trivalisation se factorise de manière unique par T.

$$\begin{tikzcd}
F \times R \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] \arrow[rr, bend left] & F \times T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & R \arrow[d] \\
Y \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend right] & T \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Torseurs et Revêtements

Le groupe de proportion de T est $Aut(F)$.

On peut reconstituer R à partir de T :

$$R = T \times_{Aut(F)} F$$

T mesure la manière dont il faut tordre le revêtement trivial pour construire R. C'est de là que vient le mot torseur.

Torseur = Ambiguïté d'identification

L'ensemble $Iso(x, y)$ classifie tous les choix d'identifications entre x et y.

Mais il n'y a aucune identification distinguée (à moins que $Iso(x, y)$ n'ait qu'un seul élément).

On peut dire que $Iso(x, y)$ mesure l'ambiguïté (la non-canonicité) à identifier x et y.

Avec ce vocabulaire, on peut dire que l'ambiguïté d'identification crée le calcul des proportions.

Ambiguïté d'identification & Galois

Dans le cas des revêtements, T encode l'ambiguïté à identifier R au revêtement trivial $F \times X \to X$.

Si T n'est pas connexe, le choix d'une composante connexe T_0 produit un espace plus petit que T qui trivialise aussi tous les revêtements (mais on a perdu l'unicité dans la propriété universelle). Autrement dit, on a pu réduire l'ambiguité.

C'est le sens du fameux théorème d'existence du groupe de Galois. Le groupe de Galois est le groupe de proportion de T_0.

Bilan sur les inter-identifications.

On a prouvé l'équivalence des structures suivantes :

- règle de trois (loi de proportionalité),
- espaces homogènes (action d'un groupe de proportions),
- distances effectives (mesure de différence),
- et torseurs (identification entre objets).

Chacune de ces notions reflète la structure des inter-identifications.

Il est remarquable que cela soit si riche. Il n'y a pas de telles variations pour les auto-identifications.

Bilan total

Jusqu'ici, on a identifié les notions suivantes d'identification

- égalité (identification minimale)
- équivalence (identification comme propriété)
- groupe (structure des auto-identifications)
- règle de trois (structure des inter-identifications)

La perspective qui met tout cela ensemble est de considérer la structure des inter-identifications d'une famille d'objets.

On arrive à la notion de groupoïde qui englobe toutes les précédentes en cas particulier.

GROUPOÏDES

Groupoïdes - Intuition

Un groupoïde ressemble à ça ;

$$\begin{tikzcd} \ast \arrow[loop left, "Aut(\star)"] \arrow[r, bend left, "Iso(\ast{,}\star)"] & \star \arrow[l, bend left, "iso(\star{,}\ast)"] \arrow[loop right, "Aut(\ast)"] \end{tikzcd}$$

Un groupoïde mélange des groupes et des torseurs en une même entité.

Dans cet exemple, un groupoïde apparait comme la collection de toutes les symétries de deux objets. C'est la première intuition sur les groupoïdes, ce sont les symétries de familles d'objets.

	un objet X	famille d'objets X_i
symétries	groupe $Aut(X)$	groupoïde $Iso(X_i, X_j)$

Groupoïdes - Intuition

Un groupoïde (à n objets), ça ressemble aussi à ça

$$\begin{pmatrix} Aut(X_1) & Iso(X_1, X_2) & \dots & Iso(X_1, X_n) \\ Iso(X_2, X_1) & Aut(X_2) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ Iso(X_n, X_1) & \dots & & Aut(X_n) \end{pmatrix}$$

Sur la diagonale on a des groupes, en dehors on a des torseurs.

Si on ordonne bien les objets, la matrice est diagonale par blocs, les blocs étant les classes d'isomorphismes d'objets.
Si les X_i ne sont pas isomorphes, la matrice est diagonale (on dit que X est réduit). S'ils sont tous isomorphes, il n'y a qu'un bloc.

Groupoïdes - Intuition

Deuxième intuition fondamentale : un groupoïde est un ensemble de mouvements inversibles *sur un espace de positions*.

Exemples :

- mouvements d'un solide (marqué) dans l'espace,
- chemins dans un espace topologique,
- actions de groupe (en particulier un groupe tout seul),
- ensembloïde.

En fait, en réfléchissant, les deux types intuitions sur les groupoïdes sont essentiellement les mêmes.

Groupoïdes & Catégories

À titre de remarque, au-delà des groupoïdes, on peut aussi penser une catégorie en termes de mouvements.

Une catégorie est un ensemble de mouvements sur un espace de positions, on a enlevé l'hypothèse de réversibilité.

Exemple: les mouvements d'un danseur (où l'action de la gravité interdit la réversibilité des sauts).

Dans la perspective de l'identification, la notion de catégorie propose plutôt un contexte de comparaison.

Groupoïdes & actions de groupes

J'ai dit qu'une action de groupe est un groupoïde.

C'est probablement le truc le plus important (et donc jamais dit) sur les actions de groupes.

Si G agit sur X, on prend X comme famille d'objet et on définit

$$Iso(x, y) = \{g \in G | gx = y\}.$$

En particulier

$$Aut(x) = \{g | gx = x\} = stab(x).$$

Groupoïdes & actions de groupes

Quand dans *La Science et l'Hypothèse* Poincaré décrit l'engendrement de l'espace par les mouvements qu'on peut y faire, il décrit en fait le groupoïde de l'action du groupe $D(3) = O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ des déplacements solides sur l'espace $\mathbb{R}^3$.

Plus généralement, la géométrie à la Klein définit un espace géométrique comme une action de groupe.

Groupoïdes - Axiomes

Axiomatisation d'un groupoïde $\mathcal{G}$ de mouvements :

- on se donne un ensemble de *positions* (objets) G_0,
- un ensemble de *mouvements* (flèches) G_1,
- pour tout mouvement des positions de départ et d'arrivée (source et but des flèches) $s, b : G_1 \rightrightarrows G_0$,
- pour chaque objet un mouvement immobile (flèche identité) $i : G_0 \to G_1$
- et une structure de composition des mouvements
  - engendrée par une fonction binaire $m : G_1 \times_{G_0} G_1 \to G_1$ définie seulement si les positions d'arrivée et de départ coïncident
  - une propriété d'associativité qui assure qu'on a une seule composition n-aire
  - les propriétés donnant son sens à l'immobilité ($g = m(g, ib(g)) = m(is(g), g)$ pour tout mouvement $g \in G_1$)
  - et une propriété d'inversion qui assure que tout mouvement g a un mouvement inverse g^{-1} échangeant les positions de départ et d'arrivée.

Groupoïdes & actions de groupes

En pratique on représente souvent un groupoïde $\mathcal{G}$ par un diagramme

$$\underbrace{G_1}_{\text{Mouvements}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad s \quad} \\ \xleftarrow{\quad e \quad} \\ \xrightarrow[\quad b \quad]{} \end{array} \underbrace{G_0}_{\text{Positions}}$$

Dans l'exemple d'une action de groupe, ça donne

$$\underbrace{G \times X}_{\text{Mouvements}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad p_2 \quad} \\ \xleftarrow{\quad e_G \quad} \\ \xrightarrow[\quad action \quad]{} \end{array} \underbrace{X}_{\text{Positions}}$$

Dans ce cas on a

$$\text{mouvement} = \text{paire (élément de } G\text{, position de départ)}$$

Si X est un point, cela permet de voir tout groupe G comme un groupoïde avec une seule position.

Groupoïdes & ensembloïdes

La représentation de $\mathcal{G}$

$$\underbrace{G_1}_{\text{Mouvements}} \;\begin{array}{c} \xrightarrow{\;s\;} \\ \xleftarrow{\;e\;} \\ \xrightarrow[\;b\;]{} \end{array}\; \underbrace{G_0}_{\text{Positions}}$$

est aussi à comparer avec le diagramme de l'ensembloïde $\mathcal{F}$

$$\underbrace{\simeq \, = F \times_{val} F}_{\text{Actions}} \;\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\; \underbrace{F}_{\text{Formules}}$$

Tout ensembloïde (en particulier tout ensemble) est un groupoïde. La différence est qu'il n'y a qu'une action pour passer d'une position (formule) à une autre dans un ensembloïde.

Cela permet d'unifier les deux notions d'action dont j'ai parlé.

Groupoïdes & ensembloïdes

Tout action de groupe est un groupoïde.

Un groupoïde $\mathcal{G}$ possède des classes d'isomorphisme (on les appelle aussi composantes connexes et on note ça $\pi_0(\mathcal{G})$).

Chaque classe d'isomorphisme peut aussi être pensée comme *déployant l'identité de quelque chose*, mais on verra ça avec la notion de quotient de groupoïde.

Groupoïdes > ensembloïdes > ensembles

Les groupoïdes organisent les inter-identifications d'une famille d'objets. À ce titre, ils sont plus performant que les ensembles (et même les ensembloïdes) pour parler des familles d'objets.

De même que les ensembloïdes, les groupoïdes doivent être pensés comme élargissant (encore plus) la notion d'ensemble.

On a des foncteurs (ceux du haut sont adjoints à gauche de ceux du bas)

$$\begin{tikzcd}
\{\text{Ensembles}\} \arrow[r, shift right, "\textit{inclusion}"'] & \{\text{Ensembloïdes}\} \arrow[l, shift right, "\textit{quotient}"'] \arrow[r, shift right, "\textit{inclusion}"'] & \{\text{Groupoïdes}\} \arrow[l, shift right, "q"'] \arrow[ll, bend right, "\pi_0"']
\end{tikzcd}$$

(q est le foncteur oubliant la multiplicité des identifications entre objet d'un groupoïde pour n'en retenir que l'existence.)

Groupoïdes - full disclosure

En fait, pour capturer toute la structure d'un groupoïde $\mathcal{G}$ il faut un diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\underbrace{G_1 \times_{b,s} G_1}_{\text{Enchainements de 2 mvt}} \arrow[r, shift left=3, "1er\ \ mvt"] \arrow[r, "composition", "des\ \ mvt"'] \arrow[r, shift right=3, "2nd\ \ mvt"'] & \underbrace{G_1}_{\text{Mouvements}} \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, shift right=2, "b"'] & \underbrace{G_0}_{\text{Positions}} \arrow[l, "e" description]
\end{tikzcd}$$

parce que la composition est une structure et n'est pas déterminée par les seuls objets G_1 et G_0.

Groupoïdes - Quotients

On va maintenant rentrer dans des choses subtiles sur les groupoïdes.

On va tenter de parler de quotient de groupoïdes.

Ça va nous amener à la théorie de l'identification des groupoïdes eux-mêmes.

C'est l'un des exemples (peut-être le plus simple) où il y a un triple registre d'identifications.

Groupoïdes - Quotients

Appliquons la règle de trois à l'analogie suivante

$$\underbrace{\simeq}_{\text{Actions}} \rightrightarrows \underbrace{F}_{\text{Éléments}} \xrightarrow[\textit{quotient}]{} \underbrace{|\mathcal{F}|}_{\text{Ensemble}}$$

$$\underbrace{G_1}_{\text{Mouvements}} \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{e} \\ \xrightarrow[b]{} \end{array} \underbrace{G_0}_{\text{Positions}} \xrightarrow[\textit{quotient}]{} \underbrace{?}_{?}$$

Qu'est-ce qu'un quotient de groupoïde ?

Groupoïdes - Première définition du quotient

Un groupoïde $\mathcal{G}$ possède aussi un quotient $|\mathcal{G}|$, mais il est plus subtil à définir que dans le cas des ensembloïdes.

Une première définition se base sur la remarque suivante.

Un ensemble est un ensembloïde $(E, \simeq)$ ayant la propriété que $\simeq$ coïncide avec $=$. On dit qu'un ensemble est un ensembloïde réduit.

On définit un groupoïde réduit comme un groupoïde qui n'a qu'un seul objet par classe d'équivalence (sa matrice est diagonale). Dans un groupoïde réduit la relation "être isomorphe" coïncide avec l'égalité.

Tout groupoïde est équivalent (voir après) à un unique groupoïde réduit.

On définit le quotient $|\mathcal{G}|$ comme l'unique groupoïde réduit équivalent à $\mathcal{G}$.

Groupoïdes - Équivalences

Les groupoïdes sont des catégories particulières, les morphismes entre groupoïdes sont définis comme étant des foncteurs.

(Il existe un autre nom pour les morphismes de groupoïdes : les cocycles. Mais on aura pas le temps d'expliquer ça.)

En particulier, on a les équivalences de groupoïdes (foncteurs qui sont des équivalences de catégories).

À isomorphisme près, il n'y a un seul groupoïde réduit par classe d'équivalence de groupoïde (c'est leur intérêt, ce sont des représentants distingués de chaque classe d'équivalence).

Tout isomorphisme de groupoïde est une équivalence mais la réciproque n'est pas vraie. Par contre, toute équivalence entre groupoïdes réduits est un isomorphisme.

Groupoïdes - Équivalences

Les groupoïdes ont naturellement un triple registre d'identification : égalité, isomorphisme et équivalence.

Ainsi, il y a une ambiguïté inhérente à la manipulation des groupoïdes : il n'est jamais clair si on parle d'eux à isomorphisme près ou à équivalence près.

Il faudrait deux mots pour désigner les groupoïdes dans chaque contexte, mais personne n'en a vraiment imposé de deuxième.

Ici, je vais parler de $\mathcal{G}$ considéré à équivalence près comme du type du groupoïde $\mathcal{G}$ et le noter $|\mathcal{G}|$.

Groupoïdes à isomorphisme près

Les groupoïdes considérés à isomorphisme près sont très utiles

- géométrie à la Klein,
- covariance en mécanique,
- atlas pour les objets géométriques (variétés, champs),
- ...

Groupoïdes à équivalence près

Les groupoïdes considérés à équivalence près sont aussi très utiles

- pour interpréter les cocycles en topologie algébrique,
- pour construire des classifiant d'objets (avec les bonnes propriétés universelles),
- pour classifier les revêtements d'un espace topologique,
- ...

Groupoïdes - Véritable définition du quotient

Revenons aux quotients.

La bonne définition du *quotient* de $\mathcal{G}$ est en fait de le définir comme le type $|\mathcal{G}|$ de $\mathcal{G}$.

Mais où habite cet objet ?

Dans une catégorie supérieure. Mais c'est peu trop long à expliquer ici. Disons seulement qu'on peut le considérer comme un objet de la 2-catégorie des groupoïdes (par opposition à le voir comme un objet de la 1-catégorie des groupoïdes). On peut aussi y penser comme un type d'homotopie (1-tronqué) dans l'∞-catégorie des types d'homotopie.

Groupoïdes

Revenons à notre règle de trois (qu'on peut maintenant compléter)

$$
\begin{tikzcd}
\underbrace{\simeq}_{\text{Actions}} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \underbrace{F}_{\text{éléments}} \arrow[r, "\textit{quotient}"'] & \underbrace{|\mathcal{F}|}_{\text{Ensemble}}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underbrace{G_1}_{\text{Mouvements}} \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, shift right=2, "b"'] & \underbrace{G_0}_{\text{Positions}} \arrow[l, "e" description] \arrow[r, "\textit{quotient}"'] & \underbrace{|\mathcal{G}|}_{\text{type (d'homotopie)}}
\end{tikzcd}
$$

Groupoïdes comme fondations

On a déjà dit que les groupoïdes élargissent la notion d'ensemble et qu'ils sont plus pertinent pour classifier des choses qui sont des objets plutôt que des éléments.

Ensemble	Élément	Égalité
Groupoïde	Objet	Isomorphisme

Les mathématiques sont fondées sur l'idée que les structures mathématiques ont un ensemble sous-jacent.

Mais si les groupoïdes sont plus performants, ne devrait-on par tenter de définir les structures mathématiques comme ayant un groupoïde sous-jacent ?

Groupoïdes comme fondations

Motivation : On a envie de parler de l'ensemble des ensembles, de l'ensemble des espaces topologiques, de l'ensemble des groupes... Mais de telle sorte que les constructions naturelles sur des ensembles, espaces topologiques, ou groupes soient invariantes par isomorphismes.

C'est très faux avec ZFC et ce genre d'axiomes.

En fait, le problème ne vient pas vraiment des axiomes mais de l'idée même d'ensemble (qui ne pense pas les isomorphismes).

La notion d'ensemble, avec sa notion d'élément comme objet sans personnalité et étranger les uns aux autres, ne sait parler naturellement que des propriétés individuelles des objets.

Exemple de problème - Bourbaki et les structures

La notion de structure de Bourbaki est pertinente, mais trop limitée car elle postule un ensemble sous-jacent.

Problème : une catégorie ayant des produits cartésiens ne peut pas s'encoder comme une structure bourbakiste !

La notion de produit cartésien n'est pas une loi de composition interne sur l'ensemble des objets d'une catégorie.

Car ça n'est pas important de remplacer $A \times B$ par un objet isomorphe (qui vérifiera encore la propriété universelle qui définit $\times$).

C'est catastrophique du point de vue des structures bourbakistes.

Pour bien définir $A \times B$ comme une structure, il faut des objets ayant des groupoïdes (voire des catégories) sous-jacentes.

En fait, avec cette remarque c'est toute l'approche des maths basée sur la logique classique (du 1er ordre ou plus) qui s'effondre !

Groupoïdes comme fondations

On a besoin d'objets ayant des groupoïdes (ou des catégories) sous-jacentes.

Avantage de cette approche : tout serait invariant par isomorphisme et non seulement par égalité (super principe des indiscernables).

Problème : trouver une syntaxe pour les groupoïdes indépendante de celle des ensembles, dans laquelle les ensembles seraient des groupoïdes particuliers.

Mega-Obstruction : on est trop habitué à penser en termes d'ensembles, c'est-à-dire d'individus isolés.
Il faut arriver à construire un langage des objets sans se fonder sur leur individualité (mais le simple fait de parler d'objet ruine presque déjà le projet).

Tentative : théorie des types à la Martin-Löf, version "homotopique" à la Voevodsky. Mais c'est encore très insuffisant.

Groupoïdes comme fondations

En fait, l'idéal serait de fonder les structures mathématiques comme ayant une catégorie sous-jacente (mais c'est encore plus dur, alors simplifions).

Il faudrait même des catégories supérieures (ça serait le Graal ou la GUT des maths !).

Mais en attendant que fait-on ?

Si cette nouvelle approche n'existe pas encore, mais qu'on en a besoin.

Comment fait-on en pratique ?

On fait ce qu'on peut : on formalise tout en termes d'ensembles.

Mais en attendant que fait-on ?

Ça amène à définir les types de groupoïdes comme des classes d'équivalence de groupoïdes et non par une définition intrinsèque.

On dit que $\mathcal{G}$ est un modèle pour son type $|\mathcal{G}|$.

Utiliser des modèles crée plein de difficultés qui semblent artificielles et qui alourdissent la présentation de la théorie.

Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux modèles pour un même type (sont équivalents), ça n'est pas vrai qu'on peut toujours substituer $\mathcal{G}$ à $\mathcal{H}$ dans la description des propriétés de leur type (c'est le cœur du problème de l'approche par modèles).

Pourtant on a envie de faire des phrases comme, "Pour tout $\mathcal{G}$, la propriété blabla est vrai." Mais en passant par les modèles, une propriété *blabla* ne se comporte en général bien que sur un sous-ensemble de modèles (qui dépend de la propriété).

Mais en attendant que fait-on ?

Le formalisme général de ce type de situation est la théorie des structures de modèles de Quillen (ou ses multiples variations).

C'est peut-être le truc le plus sophistiqué qu'on ait jamais inventé en maths.

C'est une énorme machine qui sert à contourner l'insuffisance intrinsèque de la notion d'ensemble comme "background structure" de toute structure mathématique.

C'est ça qui oblige à travailler avec la triple dialectique égalité/isomorphisme/équivalence. (Dont on voudrait en fait identifier les termes de droite.)

C'est un formalisme qui disparaitrait entièrement si on trouvait une bonne syntaxe des groupoïdes (et des catégories).

Mais ça n'est pas encore le cas.

Merci !

Identité	Identification
Entité	Entification