Les topos en analogie avec les anneaux commutatifs

— 2 —

Mathieu Anel

—

12 janvier 2018
Workshop *Logique catégorique, topos et dualité*
Université de Nice

Résumé

On continue avec l'analogie entre topos et anneaux commutatifs.

On arrivera naturellement ainsi à la notion de topos supérieur.

PLAN

I — PRÉSENTATIONS DE TOPOS

Rappels

La dernière fois, on a développé l'analogie entre topos et anneaux.

$$
\begin{tikzcd}
Ann & Ab \arrow[l, "Sym(-)"'] \\
Mon \arrow[u, "\mathbb{Z}(-)"] & Ens \arrow[l, "mon.\ libre"] \arrow[u, "\mathbb{Z}(-)"'] \arrow[ul, "\mathbb{Z}[-]"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Logos & Pres \arrow[l, "Sym(-)"'] \\
Cat^{lex} \arrow[u, "Pr(-)"] & Cat \arrow[l, "(-)^{lex}"] \arrow[u, "Pr(-)"'] \arrow[ul, "Ens[-]"']
\end{tikzcd}
$$

où

- *Cat* est la catégorie des petites catégories,
- $Pr(-)$ est le foncteur des préfaisceaux,
- $Sym(-)$ est le "topos symétrique" (Lawvere, Bunge),
- et $Ens[-]$ est le foncteur de logos libre.

Présentations de topos

On a aussi vu comment construire tous les logos à l'aide d'une présentation (X, r).

- On se donne une catégorie X de générateurs.
- On construit le logos libre

$$Ens[X] = Pr(X^{lex}).$$

  Les éléments sont des "polynômes" $F(x) = \operatorname{colim} \lim x$ en les objets de X.
- Une relation est un morphisme $r : F \to G$ dans $Ens[X]$. Il faut y penser comme une équation égalisant deux polynômes.
- Le logos quotient $Ens[x]//(f)$ se construit comme la catégorie des objets lex-locaux pour r

$$E = Ens[x]//(f) = LexLoc(r) = \left\{F | r' \perp\!\!\!\perp F\right\}.$$

  où $r' = \coprod_n \Delta^n r$ et $\perp\!\!\!\perp$ est l'orthogonalité fibre à fibre.

Présentations de topos

Les présentations (X, r) sont une alternative à la notion de site.
Elle a l'avantage de marcher aussi pour les topos/logos supérieurs (au contraire des sites).

	Site	*Présentation*
Générateurs	cat. de représentables C	cat. de générateurs X
Objet "libre"	$Pr(C)$	$Ens[X] = Pr(X^{lex})$
Relations	topologie τ	relation $r : F \to G$
Quotient	$Pr(C)//(\tau) = Sh(C, \tau)$	$Ens[X]//(r) = LexLoc(r)$

Présentations de topos

La différence entre les deux notions peut se comprendre ainsi.

Les relations dans un site sont du type

$$\operatorname{colim} \textit{représentables} = \textit{représentable}$$

où la colimite est typiquement donnée par un recouvrement de la topologie.

Les relations dans une présentation sont du type

$$\operatorname{colim} \lim \textit{générateurs} = \operatorname{colim} \lim \textit{générateurs}$$

En particulier, cela permet plus facilement d'écrire des conditions multiplicatives. Dans un un site, on est obligé d'intégrer ces conditions à la catégorie des représentables.

Présentations de topos

Exemples :

- Si S est l'espace de Sierpiński, on a
$$Sh(S) = Ens[X]//(X \to X \times X)$$
- Quotient ouvert :
$$E//(U \rightarrowtail 1)$$
- Quotient fermé complémenté : pour A dans E
$$E//(\varnothing \to A) = E//(\varnothing \to im(A))$$
- $$Ens[X \to Z \leftarrow Y]//(\varnothing \to X \times_Z Y)$$
- $$Ens[X^\bullet] = Ens[X]/X = Ens[Z \to X]//(Z \to 1)$$
- $$Ens[X^\bullet]//(X \to \Omega\Sigma X)$$
(fait plus de sens dans les topos supérieurs où Ens est remplacé par la catégorie des ∞-groupoïdes).

II — POINTS & MODÈLES

Points & modèles

Dans le premier exposé, j'ai expliqué que les topos étaient un type d'espace qui admettaient des catégories de points.

Soit X un topos correspondant au logos E.

Un point de X (ou un modèle de E) est un morphisme de logos

$$x^* : E \xrightarrow{cc\ \ lex} Ens$$

Une générisation entre deux points de X (ou un morphisme entre modèles) est une transformation naturelle

$$x^* \to y^*.$$

On note $pt(X)$ et $mod(E)$ les catégories des points de X et des modèles de E.

Points & modèles

Là encore, il faut remarquer l'analogie avec les anneaux.

Les points (rationnels) d'une k-algèbre A sont les morphismes $A \to k$.

De même qu'un morphisme d'anneaux $A \to B$ est appelé un point à coefficients dans B, on appelle un morphisme de logos

$$E \to F$$

un modèle de E dans F.

Points & modèles

Exemples

- $mod(Ens) = \{\star\}$
- $mod([C, Ens]) = Ind(C)$
- $mod(Ens^G) = \star \circlearrowleft G$
- pour une locale X, on a $mod(Sh(X)) = pt(X)$
- si G agit sur un espace X, $pt(X/G) = pt(Sh(X)^G)$ est le groupoïde d'action $pt(X)/\!/G$. P. ex. $pt(\mathbb{T}_\alpha) = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha)$ (comme ensemble)
- si $\mathbb{T}$ est une théorie de Lawvere, les modèles de $Pr(\mathbb{T}^{lex/\times})$ sont les modèles de $\mathbb{T}$
- ...

Points & modèles

Question ouverte : dans la théorie des anneaux commutatifs, on appelle point un morphisme $A \to K$ vers un corps K.

Les logos ont-ils une classe d'objets distingué jouant le rôle des corps ?

Une solution est de regarder les "topos simples", définit comme n'ayant aucun sous-topos.

Une autre est de regarder les topos X telle que tout faisceau sur X admet une section globale.

Y a-t-il d'autres exemples que *Ens* ?

Topos local en un point

Il existe toujours un morphisme de logos $e^* : Ens \to E$. Un point est une section de de morphisme.

Le foncteur $\Gamma = e_* : E \to Ens$ est le foncteur des sections globales.

Un logos E est dit local si $\Gamma : E \to Ens$ est un point. Comme Γ commute avec toutes les limites, cela revient à demander qu'il soit cocontinu.

Intuitivement, cela signifie que la catégorie $pt(X)$ possède un élément initial.

Le vocabulaire vient des anneaux locaux (dont les points ont un point initial pour la générisation).

Question : De même qu'on peut factoriser un point d'anneau $A \to K$ en un anneau local $A \to A_{\mathfrak{p}} \to K$, peut-on factoriser un point $E \to Ens$ par un topos local ?

III — CHANGEMENTS DE BASE

Locales & Topos

La théorie des topos agrandit la théorie des locales.

Essentiellement en remplaçant les ensembles ordonnés (de points et d'ouverts) par des catégories.

La catégories de locales se plonge dans celle des topos

$$\begin{array}{ccc} Locales = TDC^{op} & \subset & Topos = Logos^{op} \\ O(X) & \longmapsto & Sh(X) \end{array}$$

où

$$Sh(X) = [O(X)^{op}, Ens]^{rec}\,.$$

est formé des foncteurs qui préservent les collages de recouvrements (= les colimites qui n'ont pas besoin d'être changées).

Locales & Topos

On rappelle le produit tensoriel de catégories présentables

$$A \otimes B = Pr(A \times B) // ((\operatorname{colim} a_i) \otimes b = \operatorname{colim}(a_i \otimes b), \dots)$$

La dernière fois j'ai oublié de dire que l'unité pour ce produit tensoriel était *Ens*

$$Ens \otimes A = A.$$

Je ne vous ai pas donné non plus la formule simple pour le calculer

$$A \otimes B = [A^{op}, B]^c = [B^{op}, A]^c.$$

Locales & Topos

Un ensemble ordonné complet est un cas particulier catégorie présentables.

En particulier $\underline{2} = \{0 \to 1\}$ est une catégorie présentable.

On peut calculer que

$$Sh(X) \otimes \underline{2} = O(X).$$

Locales & Topos

La formule $E \otimes \underline{2}$ fait sens pour tout logos E.

Elle produit toujours un TDC qui s'identifie au TDC des objets sous-terminaux de E

$$E \otimes \underline{2} = Sub(1) = \text{Ouverts de } E.$$

Le foncteur induit

$$- \otimes \underline{2} : Topos \to Locales$$

est adjoint à gauche de l'inclusion

$$\begin{array}{rcl} Locales = TDC^{op} & \subset & Topos = Logos^{op} \\ O(X) & \longmapsto & Sh(X) = [O(X)^{op}, Ens]^{rec} \end{array}$$

$- \otimes \underline{2}$ est le foncteur de réflexion localique.

Locales & Topos

Le foncteur suivant préserve les colimites & les produits (mais pas les limites finies)

$$\begin{aligned} \pi_{-1} : Ens &\longrightarrow \underline{2} = \{0 \to 1\} \\ \varnothing &\longmapsto 0 \\ E \neq \varnothing &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Il faut penser à la formule précédente comme un changement de base

$$Sh(X) \otimes \underline{2} = O(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{Z}[x] \otimes \mathbb{Z}_{/2} = \mathbb{Z}_{/2}[x]$$

Locales & Topos

L'analogie suivante à un certain sens et donne une idée de ce qu'on gagne à faire des topos.

Topologie localique	*Topologie topossique*
$\underline{2} = \{0,1\} \leftrightarrow \mathbb{Z}_{/2}$	$\mathit{Ens} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
Géom. alg. à coeff. dans $\mathbb{Z}/2$	Géom. alg. à coeff. dans $\mathbb{Z}$
Étude des solutions d'équations à coefficients dans $\{0,1\}$	Étude des solutions d'équations à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Locales & Topos

Le produit tensoriel de catégorie présentable permet de définir, les faisceaux à valeurs dans une catégorie présentable A par

$$Sh(X,A) = Sh(X) \otimes A = [Sh(X)^{op}, A]^c \,.$$

Il faut penser cette opération comme le tenseur d'une $\mathbb{Z}$-algèbre par un $\mathbb{Z}$-module

$$\mathbb{Z}[x] \otimes M = M[x].$$

En particulier, les groupes abéliens et catégories internes à $Sh(X)$ peuvent se définir par

$$Sh(X,Ab) = Sh(X) \otimes Ab,$$

$$Sh(X,Cat) = Sh(X) \otimes Cat.$$

IV — TOPOS SUPÉRIEURS

Locales & Topos

Les idées précédentes de changements de base permette un accès assez facile aux topos supérieurs.

On note $\mathcal{S}$ l'∞-catégorie des ∞-groupoïdes (ou types d'homotopies).

Le foncteur π_0 commute aux colimites et aux produits (mais pas aux limites finies)

$$\begin{aligned} \pi_0 : \mathcal{S} &\longrightarrow Ens \\ X &\longmapsto \pi_0(X) \end{aligned}$$

On va pouvoir faire un changement de base par rapport à ce foncteur.

Locales & Topos

L'adjonction naturelle des topos et des ∞-topos va suivre les mêmes formules que l'adjonction des locales et des topos.

$$\begin{array}{rcl} Topos_\infty & \rightleftarrows & Topos \\ Sh_\infty(X) & \mapsto & Sh_\infty(X) \otimes Ens \\ Sh_\infty(X) = [Sh(X)^{op}, \mathcal{S}]^{req} & \leftarrow\!\shortmid & Sh(X) \end{array}$$

où $[Sh(X)^{op}, \mathcal{S}]^{req}$ est formé des foncteurs qui préservent les sommes et les quotients de relations d'équivalences ($=$ les colimites qui n'ont pas besoin d'être dérivées).

Locales & Topos

On peut prolonger la table de l'analogie des topologies générales.

Top. localique	*Top. topossique*	*Top.* ∞*-topossique*
$\underline{2} = \{0, 1\} \leftrightarrow \mathbb{Z}_{/2}$	$Ens \leftrightarrow \mathbb{Z}$	$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathbb{Z}[s]$
Étude sol. éqt	Étude sol. éqt	Étude sol. éqt
à coeff. dans $\{0, 1\}$	à coeff. dans $\mathbb{Z}$	à coeff. dans $\mathbb{Z}[s]$

Pour avoir une analogie un peu plus précise, on peut penser à $\mathbb{Z}_{/2}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[s]$ comme les anneaux où vivent naturellement les caractéristiques d'Euler des espaces correspondant (quand elles sont définies).

Catégories supérieures

Avant de donner la définition des topos supérieurs, on va rappeler pourquoi on a besoin des catégories supérieures.

Une catégorie supérieure est une notion dont il est assez facile de se faire une intuition (flèches entre flèches...), mais dont la formalisation reste problématique.

Dans l'état des choses, on a beaucoup de méthodes pour travailler sur les catégories supérieures dont toutes les flèches supérieures sont inversibles — dites $(\infty, 1)$-catégories.

Les catégories supérieures plus générales ne sont pas encore bien apprivoisées.

On va se limiter à la considération de $(\infty, 1)$-catégories.

Catégories supérieures

Pourquoi a-t-on besoin de la théorie des catégories supérieures ?

Deux raisons :

- Les ensembles souffrent d'un défaut : ils ne permettent pas se classifier eux-mêmes.
- Les définitions de certaines notions deviennent plus simples dans le contexte des catégories supérieures (notamment la définition de topos).

Catégories supérieures — Le défaut des ensembles

La notion d'ensemble est un outil de collectivisation, elle sert à dire

"il y a un *ensemble* de ces trucs là".

Le discours interne à un ensemble est très réduit : étant donné deux éléments, on ne peut dire que $a = b$ ou $a \neq b$. On peut dire qu'un ensemble collectivise des trucs à égalité près.

Or, il y a des situations, où l'on veut classifier les objets à isomorphisme près, et non à égalité près. C'est le cas des ensembles eux-mêmes et de toutes les structures à la Bourbaki (groupes, espaces topologiques...)

Cela se fonde sur l'idée intuitive que deux objets isomorphes doivent avoir exactement les mêmes propriétés.

Cette idée simple met en crise la notion d'ensemble.

Catégories supérieures — Le défaut des ensembles

Cette idée que deux ensembles en bijection doivent avoir exactement les mêmes propriétés amène à considérer les ensembles non pas comme formant un ensemble, mais une catégorie.

Les catégories doivent être pensées, à l'instar des ensembles, comme des outils de collectivisation capable de répondre à plus de situations de collectivisation.

Elles permettent de collectiviser des objets à isomorphisme près, c'est-à-dire qu'elles rendent possible la pluralité des identifications entre deux objets.

Catégories supérieures — Le défaut des catégories

La notion de catégorie souffre le même défaut que celle des ensembles, si on les collectivise, il faut la notion de 2-catégorie.

La seule notion stable est la notion — un peu mystérieuse et peut-être multiple, comme toutes les notions limites — d'∞-catégorie.

C'est la seule la notion répondant à l'intuition de collectivisation qui soit auto-classifiante.

Catégories supérieures — Simplifications

Au-delà des considérations de collectivisation, la théorie des catégories supérieures se justifie, parce qu'elle simplifie un certain nombre de choses :

Elle absorbe naturellement tous les phénomènes homotopiques et homologiques, c'est-à-dire le formalisme des "foncteurs dérivées".

À l'intérieur du paradigme des catégories supérieures, il n'est plus nécessaire de dériver aucun foncteur, les constructions sont directement les bonnes.

En logique, ce point de vue "homotopique" est relié aux questions de réécriture.

Catégories supérieures — Simplifications

Deux types fondamentaux de catégories supérieures s'imposent.

- La notion de catégorie stable s'impose dans l'étude des phénomènes de nature homologique.
  Elle se définit plus simplement que celle de catégorie triangulée ou de dérivateur et permet plus facilement de faire de l'algèbre homologique.
- La notion d'∞-topos s'impose dans l'étude des phénomènes de nature homotopique.
  Elle se définit plus simplement que celle de topos et possède des propriétés plus sympa.

Topos supérieurs

Afin de définir la notion de topos supérieur on a besoin de quelques préliminaires

1. sur la notion d' ∞-catégorie présentable
2. sur la notion de descente
3. sur la notion de colimite homotopique

Topos supérieurs — Catégorie présentables

Une catégorie A est présentable si elle une localisation cocontinue d'une catégorie de préfaisceaux $Pr(C) = [C^{op}, Ens]$.

Pour définir la notion correspondante dans les ∞-catégories, on remplace Ens par l'∞-catégorie $\mathcal{S}$ des types d'homotopie.

Une ∞-catégorie A est présentable si elle une localisation cocontinue d'une catégorie $Pr(C, \mathcal{S}) = [C^{op}, \mathcal{S}]$.

La structure des ∞-catégories présentables est la même que celle des catégories présentables. On a un produit tensoriel construit de la même manière dont $\mathcal{S}$ est l'unité.

Topos supérieurs — Descente

Soit C une ∞-catégorie ayant toutes les limites et colimites.

On a un foncteur canonique

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{U} : C^{op} & \longrightarrow & CAT_\infty \\ x & \longmapsto & C_{/x} \\ u : x \to y & \longmapsto & u^* : C_{/y} \to C_{/x}. \end{array}$$

La catégorie des éléments de ce foncteur est la fibration universelle de C

$$\begin{tikzcd} (C^{\to})^{op} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & CAT_\infty^\bullet \arrow[d] \\ C^{op} \arrow[r, "\mathbb{U}"] & CAT_\infty \end{tikzcd}$$

On dit qu'une catégorie C vérifie la descente si le foncteur $\mathbb{U}$ envoit les colimites de C dans des limites dans Cat.

Autrement dit, si, pour un diagramme $X : I \to C$, on a

$$C_{/\operatorname{colim} X_i} = \lim C_{/X_i}.$$

La catégorie $\lim C_{/X_i}$ se calcule comme la catégorie des diagrammes cartésiens au-dessus de X

$$\lim C_{/X_i} = (C^I_{cart})_{/X}$$

où C^I_{cart} est la catégorie des I-diagrammes et morphismes cartésiens.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "cart"'] \\ X \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y_j \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & X_j \end{tikzcd}$$

Pour tout diagramme $X : I \to C$, on a toujours une adjonction $\operatorname{colim}_I \dashv cst_I$

$$C_{/\operatorname{colim} X_i} \underset{\mathrm{cst}_I}{\overset{\operatorname{colim}_I}{\rightleftarrows}} (C^I_{cart})_{/X}.$$

où

$$\mathrm{cst}_I(Y \to \operatorname{colim} X)_i = Y_i$$

est défini par

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & \operatorname{colim} X_i. \end{tikzcd}$$

Topos supérieurs — Descente

$$C_{/\operatorname{colim} X_i} \underset{\mathrm{cst}_I}{\overset{\mathrm{colim}_I}{\rightleftarrows}} (C^I_{cart})_{/X}.$$

1. On dit que les colimites de I-diagrammes sont universelles si, pour tout X, le foncteur cst_I est pleinement fidèle (c'est-à-dire si le foncteur colim_I est une localisation).
   Cela signifie que, pour tout $Y \to \operatorname{colim} X_i$, on a
   $$Y = \operatorname*{colim}_I (Y \times_{\operatorname{colim} X_i} X_i).$$
2. On dit que les colimites de I-diagrammes sont effectives si, pour tout X, le foncteur colim_I est pleinement fidèle.
   Cela signifie que, pour tout $E_i \to X_i$, on a
   $$E_i = (\operatorname*{colim}_I E_i) \times_{\operatorname{colim} X_i} X_i.$$

Topos supérieurs — Définition

Une catégorie C vérifie la descente ssi toutes les colimites sont effectives et universelles.

Dans un logos, seules les unions et relations d'équivalences sont effectives.

Un ∞-logos est une ∞-catégorie présentable qui vérifie la descente.

Un morphisme d'∞-logos est un foncteur préservant les limites finies et toutes les colimites.

On définit les ∞-topos comme les objets de

$$Topos_\infty = Logos_\infty^{op}.$$

On peut prouver que la seule catégorie ordinaire qui vérifie la descente est la catégorie triviale à un objet $\{0\}$.

En particulier, un logos n'est pas un ∞-logos s'il n'est pas trivial.

Les relations entre logos et ∞-logos sont données par l'adjonction de changement de base

$$\begin{array}{rcl} - \otimes Ens : Logos_\infty & \longrightarrow & Logos \\ Sh_\infty(X) & \mapsto & Sh_\infty(X) \otimes Ens \\ Sh_\infty(X) = [Sh(X)^{op}, \mathcal{S}]^{req} & \leftarrow\!\shortmid & Sh(X) \end{array}$$

Topos supérieurs — Colimites homotopiques

Plaçons-nous dans les ensembles.

L'idée pour construire une colimite homotopique est très simple.

1. Cette limite ne sera pas un ensemble, mais un ensemble simplicial qu'on regardera à homotopie près.
2. La construction de cet ensemble simplicial procède ainsi :
   - pour chaque identification entre deux éléments, on met un intervalle entre eux,
   - pour chaque identification entre trois éléments, on met un triangle entre eux,
   - pour chaque identification entre $n+1$ éléments, on met un n-simplexe entre eux.

La colimite classique se retrouve en prenant l'ensemble des composantes connexes de la colimite homotopique.

Plus formellement, la colimite homotopique d'un diagramme

$$I \to \mathrm{Ens}$$

est simplement le nerf de ce diagramme (nerf de la catégorie des éléments).

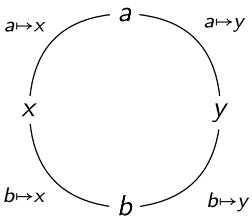
En particulier, le nerf du diagramme constant de valeur $\{*\}$ est simplement le nerf $|I|$ de la catégorie I.

Topos supérieurs — Colimites homotopiques

On considère le pushout

$$\{x\} \longleftarrow \{a,b\} \longrightarrow \{y\}$$

dont la colimite classique est un point.
Sa colimite homotopique a 4 sommets (indexés par les 4 éléments) et 4 arêtes (indexées par les 4 flèches entre éléments)



C'est un cercle. Comme il est connexe, on retrouve bien que le quotient classique est un point.

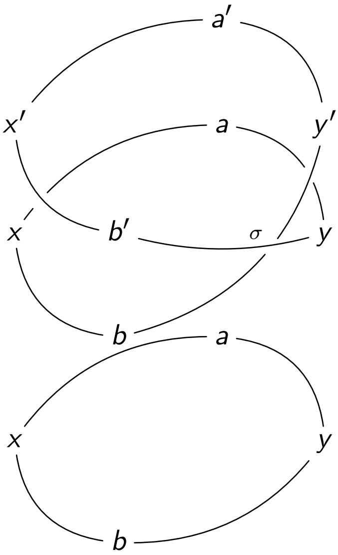
Topos supérieurs — Colimites homotopiques

On considère maintenant un diagramme cartésien

$$
\begin{tikzcd}
\{x, x'\} \arrow[d] & \{a, a'\} \coprod \{b, b'\} \arrow[l, "{(id,id)}"'] \arrow[r, "{(id,\sigma)}"] \arrow[d] & \{y, y'\} \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\{x\} & \{a, b\} \arrow[l] \arrow[r] & \{y\} & X
\end{tikzcd}
$$

La colimite du bas est donc un cercle. Celle d'en haut donne aussi un cercle, mais, à cause de la permutation σ, formant un revêtement de degré 2 du cercle du bas.

Topos supérieurs — Colimites homotopiques



$$\begin{tikzcd} \operatorname{colim} Y \arrow[d] \\ \operatorname{colim} X \end{tikzcd}$$

On a un morphisme canonique $\{x\} \to \operatorname{colim} X$.

L'effectivité des colimites nous dit qu'on doit avoir

$$\{x\} \times_{\operatorname{colim} X} \operatorname{colim} Y = \{x, x'\}.$$

C'est-à-dire que la fibre de $\operatorname{colim} Y \to \operatorname{colim} X$ en x est $\{x, x'\}$. On constate que c'est bien le cas.

En comparant avec la colimite classique, cela illustre que *Ens* ne vérifie pas l'effectivité des pushouts.

L'effectivité des colimites peut se comprendre en disant que les fibres d'un morphisme entre colimites doivent être les mêmes que les fibres des morphismes entre les objets des diagrammes correspondants.

Topos supérieurs — Stabilisation

On peut considérer d'autres changements de base.

La stabilisation d'une catégorie présentable A est définie par

$$A \otimes Sp = [A^{op}, Sp]$$

où Sp est la catégorie des spectres (au sens de la topologie algébrique).

La stabilisation d'un ∞-logos est la catégorie des faisceaux en spectres

$$Sh(X, Sp) = Sh(X) \otimes Sp = [Sh(X)^{op}, Sp]$$

C'est le support de la dualité de Verdier.

Topos supérieurs — Univers

Dans une catégorie présentable A un foncteur continu $A^{op} \to \mathcal{S}$ est toujours représentable.

Appelons une (grosse) catégorie interne dans une catégorie présentable A tout foncteur continu $A^{op} \to CAT$.

Abstraction faite des problèmes de taille, la condition de descente dit qu'une catégorie présentable est un ∞-logos si la fibration universelle est une catégorie interne. On retrouve la caractérisation des topos comme catégorie présentable ayant un univers.

Topos supérieurs — Exemples

- ∞-logos initial (libre sur 0 générateurs) $\mathcal{S}$
- ∞-logos libre sur 1 générateur (classifiant des objets)

$$\mathcal{S}[x] = [\mathcal{F}in, \mathcal{S}]$$

- ∞-logos libre sur une catégorie C (classifiant les C-diagrammes) :

$$\mathcal{S}[C] = Pr(C^{lex}, \mathcal{S})$$

- ∞-logos classifiant les objets pointés:

$$\mathcal{S}[X^\bullet] = \mathcal{S}[X]_{/X} = [\mathcal{F}in^\bullet, \mathcal{S}]$$

Topos supérieurs — Exemples

- ∞-logos classifiant les sous-objets :

$$\mathcal{S}[X]/\!/(\Delta X)$$

$(\Delta X = X \to X \times X)$

- ∞-logos classifiant les objets discrets (0-tronqués) :

$$\mathcal{S}[X]/\!/\left(\Delta^2 X\right)$$

$(\Delta^2 X = X \to X^{S^2})$

- ∞-logos classifiant les objets n-tronqués :

$$\mathcal{S}[X]/\!/\left(\Delta^{n+2} X\right)$$

$(\Delta^n X = X \to X^{S^n})$

Topos supérieurs — Exemples

- ∞-logos classifiant les objets non-vides :

$$\mathcal{S}[X]/\!/(im(X \to 1)) = [\mathcal{F}in_\circ, \mathcal{S}]$$

- ∞-logos classifiant les objets connexes :

$$\mathcal{S}[X]/\!/\big(im(\Delta X) \coprod im(X \to 1)\big)$$

- ∞-logos classifiant les objets connexes pointés :

$$\mathcal{S}[X^\bullet]/\!/(im(\Delta X^\bullet))$$

  C'est le topos classifiant les groupes.

- ∞-logos classifiant les objets n-connexes pointés :

$$\mathcal{S}[X^\bullet]/\!/\big(\forall\, k \leq n, im(\Delta^{k+1} X^\bullet)\big)$$

  C'est le topos classifiant les E_n-groupes.

Topos supérieurs — Exemples

Appelons une famille d'objets pointés X_i additive si les flèches canoniques $X_i \vee X_j \to X_i \times X_j$ sont des isomorphismes (autrement dit si les sommes et les produits de ces objets coïncident).

Appelons un objet pointé X stablement additif si la famille de ses espaces de lacets $\Omega^n X$ est additive

Le classifiant des objets stablement additifs est

$$\mathcal{S}[X^\bullet]/\!/(\forall m, n,\ \Omega^m X \vee \Omega^n X \to \Omega^m X \times \Omega^n X).$$

Théorème (A.-Biedermann-Finster-Joyal) C'est une présentation du fameux topos des spectres paramétrés.

Merci !