Trois exposés sur la théorie des topos

Mathieu Anel

—

9 janvier 2018
Workshop *Logique catégorique, topos et dualité*
&
Séminaire *Pensée des Sciences*

Université de Nice

– Lecture I –

La place des topos dans la formalisation de l'espace

Résumé

Le but de cet exposé est de faire comprendre ce qu'est un topos, sans en donner aucune définition.

On va pour cela expliquer à quels problèmes la notion de topos répond et commenter quelques exemples de topos.

On va aussi tenter de dresser une géographie des types d'espace mathématiques. Cela aidera à comprendre où se placent les notions d'espace topologique et de topos.

PLAN

I — RAPPELS DE TOPOLOGIE CLASSIQUE

Rappels de topologique classique

Puisque la notion d'espace topologique est ce dont on veut s'émanciper, il faut commencer par quelques rappels.

Un espace topologique est défini par

- un ensemble de points $pt(X)$
- et un ensemble de parties ouvertes $O(X) \subset P(pt(X))$

Pour comprendre ce qu'est un topos, il va falloir s'émanciper de ces deux éléments.

Il va falloir

- renoncer à l'idée que les points sont fondamentaux
- et comprendre les insuffisances de la notion d'ouvert.

Rappels de topologique classique – Générisation

Une première remarque est que les deux ensembles précédents sont en fait des ensembles ordonnés :

- $O(X)$ est ordonné par l'inclusion
- $pt(X)$ est ordonné par la relation de générisation

On dit que x est une générisation de y (on note $y \to x$) si tout ouvert contenant y contient aussi x

$$y \in U \implies x \in U.$$

La relation de générisation est préservée par les applications continues $f : X \to X'$

$$y \to x \implies f(y) \to f(x).$$

Rappels de topologique classique – Générisation

C'est une relation naturelle dans les espaces dont les points classifient des objets qui se comparent entre eux. Typiquement des espaces classifiant des sous-espaces d'un espace donné : on a alors

$$y \to x \iff y \subset x.$$

Un bon exemple est un spectre de Zariski où les points sont les idéaux premiers d'un anneau. L'inclusion des idéaux correspond à la relation de générisation entre les points :

$$\mathfrak{p} \to \mathfrak{q} \iff V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{q}) \iff \mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}.$$

L'idée qu'on peut garder en tête si on ne connait pas trop ça est :

générisation = « inclusion » d'un point dans un autre.

Rappels de topologique classique – Générisation

Si $x \leftrightarrow y$, on dit que x et y sont équivalents.

C'est une relation d'équivalence qui signifie que tout ouvert contenant l'un contient aussi l'autre. Psychologiquement, on peut vraiment penser que x et y sont deux copies d'un même point.

Un espace est dit T_0 si $x \leftrightarrow y$ implique $x = y$.

Un espace est dit T_1 si $x \to y$ implique $x = y$.

Un espace est dit T_2 s'il est Hausdorff.

Un espace topologique général est donc très "sous-Hausdorff". On verra que les topos sont encore plus en-dessous.

Rappels de topologique classique – Générisation

La relation de générisation sur les points s'étend à une relation d'ordre sur les ensembles d'applications continues.

Pour deux applications continues

$$f, g : X \to Y,$$

on dit que f est une générisation de g (on note $g \to f$) si, pour tout point x de X, $f(x)$ est une générisation de $g(x)$.

$$g \to f \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x, \quad g(x) \to f(x)$$

Psychologiquement, on peut penser que g prend ses valeurs dans les « sous-points » de f.

Rappels de topologique classique – Sierpiński

Un espace topologique particulièrement important est l'espace S de Sierpiński.

C'est la seule topologie non-triviale sur $\{0, 1\}$.

L'ensemble ordonné des ouverts est

$$O(S) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\big\}.$$

L'ensemble ordonné des points est

$$pt(S) = \{0 \to 1\}$$

(tout ouvert contenant 0 contient aussi 1).

En particulier, 0 est un point fermé, mais 1 est un point ouvert.

Pour le retenir, il faut comparer S à $\mathbb{R}$: $0 \in S$ correspond à $0 \in \mathbb{R}$ et 1 à $\mathbb{R}^*$ (les inversibles) qui est ouvert dans $\mathbb{R}$.

Rappels de topologique classique – Sierpiński

Si X est un espace topologique, une application continue $f : X \to S$ est la même chose qu'une partition de X en un ouvert $\{f = 1\}$ et un fermé $\{f = 0\}$ complémentaires :

$$\{f = 1\} = f^{-1}(1) \qquad \text{et} \qquad \{f = 0\} = f^{-1}(0).$$

Il faut penser $f : X \to S$ comme à la fonction caractéristique de l'ouvert $\{f = 1\}$.

L'ordre de générisation sur les applications $f, g : X \to S$ correspond à la relation suivante

$$\begin{array}{ccc} g \to f & \Longleftrightarrow & \{g = 1\} \subset \{f = 1\} \\ \text{générisation} & = & \text{inclusion.} \end{array}$$

L'ordre de générisation transforme $C^0(X, S)$ en le treillis des ouverts de X !

Rappels de topologique classique – Sierpiński

La formule $O(X) = C^0(X, S)$ est fondamentale.

Elle dit que les algèbres d'ouverts sont des algèbres de fonctions continues.

De même que l'ensemble $C^0(X, \mathbb{R})$ hérite de la structure d'anneau de $\mathbb{R}$, on peut comprendre la structure de treillis distributif complet sur $C^0(X, S)$ comme hérité d'une structure analogue sur S lui-même.

Cela donne aussi un nouveau point de vue sur l'équivalence de générisation : $x \leftrightarrow y$ signifie que l'on ne peut pas séparer les deux points x et y par les valeurs de fonctions continues $X \to S$.

Rappels de topologique classique – Alexandrov

L'ordre de générisation induit un foncteur

$$\begin{array}{rcl} pt : Top & \longrightarrow & Ord \\ X & \longmapsto & pt(X) \end{array}$$

dont l'adjoint à gauche est la construction d'Alexandrov

$$\begin{array}{rcl} |-| : Ord & \longrightarrow & Top \\ C & \longmapsto & |C| \end{array}$$

où $|C|$ est un espace topologique ayant C comme ensemble de points et l'ordre de C comme ordre de générisation.

Le foncteur $|-|$ est pleinement fidèle.

Rappels de topologique classique – Alexandrov

Calcul des ouverts de $|C|$.

Par adjonction on a

$$|C| \to S \quad \Longleftrightarrow \quad C \to pt(S) = \{0 \to 1\}$$

d'où

$$O(|C|) = [C, \{0 \to 1\}] .$$

Autrement dit, les ouverts de $|C|$ sont les parties stables supérieurement (cocribles).

En particulier, tout élément c de C définit un ouvert $\underline{c} = \{d | c \to d\}$. C'est une base d'ouverts de $|C|$.

Une application continue $|C| \to X$ correspond à un C-diagramme dans les points de X.

Dualement, une application continue $X \to |C|$ correspond à une stratification de X indexée par C (donnée par les images inverse des $\underline{c}$).

On verra plus loin comment tout cela se généralise aux topos et permet d'en comprendre certains aspects.

On se tourne maintenant vers des exemples de situations où la notion d'espace topologique est insuffisante.

II — EXEMPLES D’ESPACES PATHOLOGIQUES

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

On vient de voir que $O(X) = C^0(X, S)$.

Les morphismes continus d'espaces topologiques préservent les unions arbitraires et les intersections finies d'ouverts.

Cela amène à regarder la structure des algèbres d'ouverts d'un espace topologique comme un treillis distributif complet.

Dans cette dualité "espace/treillis de fonctions vers S", les sous-espaces correspondent naturellement à des quotients de treillis.

Si $Y \subset X$ est un sous-espace de X, la restriction des ouverts de X donne un morphisme de treillis

$$Y \cap - : O(X) \to O(Y).$$

Soit W la classe des inclusion $U \to V$ qui ont même restriction sur Y. Le morphisme $Y \cap -$ peut se décrire comme la localisation de $O(X)$ par W.

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

La réciproque à la propriété précédente n'est pas vraie : toute localisation exacte (préservant $\cap$) de $O(X) \to A$ ne produit pas l'algèbre des ouverts sur un espace topologique.

Devant ce genre de situation (assez courante en maths) on a deux choix : soit on accepte la situation comme un fait, soit on décide de forcer la correspondance et de définir de nouveaux sous-espaces de X par les quotients arbitraires du treillis $O(X)$.

La seconde option est en général toujours plus intéressante. Car à forcer ce genre de correspondance on découvre souvent une nouvelle intuition pour l'objet de départ. On découvre souvent qu'on avait une vue trop limitée de cet objet et qu'il faut l'émanciper.

Cette émancipation de la notion d'espace topologique est celle de locale.

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

La catégorie des locales est définie formellement comme l'opposée de la catégorie des treillis distributifs complets.

Les treillis distributifs sont des abstractions de la structure des treillis d'ouverts.

La différence entre les deux est que les treillis d'ouverts sont munie de la donnée supplémentaire d'un plongement $O(X) \subset P(E)$.

La définition d'une locale relaxe la condition de prescrire un ensemble de points.

On gagne ainsi deux choses.

1. Une algébrisation de la notion d'espace : on peut construire des treillis par générateurs et relations.
2. et de nouveaux espaces qu'il faut apprivoiser.

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

Voici un exemple de nouvel espace amusant produit par la notion de locale.

Pour deux ensembles A et B, on considère le treilli libre engendré par $A \times B$: on le construit comme la complétion de $A \times B$ pour les intersections finies suivie de la complétion pour les unions quelconques :

$$\bigcup((A \times B)^{\cap}).$$

On note 0 et 1 les éléments minimaux et terminaux et $[a \mapsto b]$ la paire (a, b). Il faut penser à comme $[a \mapsto b]$ comme l'ensemble des fonctions $A \to B$ qui envoient a sur b.

On impose les relations suivantes

1. (tout a a une image) $\forall\ a$, $\bigcup_b [a \mapsto b] = 1$
2. (l'image de a est unique) $\forall\ a$ et $b \neq b'$, $[a \mapsto b] \cap [a \mapsto b'] = 0$
3. (surjectivité) $\forall\ b$, $\bigcup_a [a \mapsto b] = 1$

On note $Surj(A, B)$ le treillis ainsi construit.

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

Un point de $Surj(A, B)$ est un morphisme de treillis $Surj(A, B) \to \{0 \to 1\}$.

Une petite analyse montre qu'un point de $Surj(A, B)$ correspond exactement à la donnée d'une fonction surjective $A \to B$. $Surj(A, B)$ est l'espace des surjections $A \twoheadrightarrow B$, avec sa topologie naturelle issue de la topologie produit de B^A.

La théorie des locales permet de prouver que le fait amusant que ce treillis est non-trivial si $A = \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{R}$.

Mais d'un autre côté, le treillis $Surj(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ne peut avoir aucun point.

On se retrouve donc avec la situation étrange d'une locale non-vide mais qui ne peut avoir aucun point !

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

C'est la grande nouveauté des locales : elles n'ont pas toujours des points.

Dans les espaces topologiques, les sous-espaces de X sont complétement déterminés par le sous-ensemble de points correspondant.

Mais dans le contexte des locales, il y a beaucoup plus de sous-espaces, dont certains qui n'ont aucun point !

Il faut comparer la situation à des équations $P(x) = 0$ où $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ qui n'ont aucune solution dans $\mathbb{Q}$. Le sous-schéma

$$Spec(\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)) \subset Spec(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{A}^1$$

n'a aucun point sur $\mathbb{Q}$ (sans être trivial, puisqu'il a des deux points dans $\mathbb{C}$).

Exemple 1 — Espaces sans assez de points

Il est en fait très utile de comparer la théorie des locales à celle des schémas affines.

Topologie	*Géométrie algébrique*
Treillis distributif complet	Anneau
Locale	Schéma affine
sans points	sans points rationnels

La topologie est une géométrie algébrique qui s'ignore !

Cela va donner la porte d'entrée vers les topos.

Exemple 2 — Espaces sans assez d'ouverts

On considère $\mathbb{R}$ muni de l'action par translation du réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha$ dont on note le quotient

$$\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha).$$

Si α est rationnel ce réseau est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et l'espace quotient est un cercle.

Si α est irrationnel ce réseau est dense et l'espace quotient est la topologie triviale sur l'ensemble des orbites (qui est un ensemble non-dénombrable).

On a donc un espace sous-T_0 : tout les points sont équivalents. Autrement dit, les fonctions continues $X \to S$ n'arrivent à séparer aucune paire de points.

Pour un tel espace, toute application $X \to \mathbb{T}_\alpha$ est continue.

Exemple 2 — Espaces sans assez d'ouverts

Pourtant, il existe un point de vue (méthodes équivariantes) où il n'y a pas autant d'applications continues $X \to \mathbb{T}_\alpha$.

C'est un peu long à expliquer en détails, mais cela revient à dire qu'une application $X \to \mathbb{T}_\alpha$ est la même chose qu'un diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \\ X & \end{tikzcd}$$

où $P \to X$ est un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha$ et où $P \to \mathbb{R}$ est une application continue équivariante.

Une telle donnée produit une fonction $X \to \mathbb{T}_\alpha$ qui associe à x l'orbite dans $\mathbb{R}$ image de la fibre P_x. Quand on y réfléchit, c'est une excellente manière de définir une "famille continue d'orbites paramétrée par X".

Exemple 2 — Espaces sans assez d'ouverts

La contrainte de variation continue sur les fibres de $P \to X$ ne permet pas d'obtenir n'importe quelle application $X \to \mathbb{T}_\alpha$.

Soit $f : X \to \mathbb{T}_\alpha$ une application construite à partir d'un diagramme $X \leftarrow P \to \mathbb{R}$. Soit σ une permutation non-continue de X alors $f\sigma : X \to \mathbb{T}_\alpha$ n'est pas associée à la donnée d'un diagramme $X \leftarrow P' \to \mathbb{R}$. Si tel était le cas, le fibré P' devrait être le tiré en arrière de P le long de σ, or σ n'étant pas continue, ce tiré en arrière n'existe pas.

La morale de l'histoire est qu'il manque une donnée topologique sur l'espace $\mathbb{T}_\alpha$ pour restreindre convenablement les applications continues $X \to \mathbb{T}_\alpha$.

Exemple 3.1 — Espaces avec des catégories de points

Soit $R \to X$ un revêtement de degré n.

En pensant à R comme la famille de ses fibres, il est naturel de penser R comme définissant une fonction continue sur X dont la valeur en x est la fibre R_x. (C'est cohérent avec ce qu'on a dit dans l'exemple 2 avec $P \to X$.)

Mais dans quel espace cette fonction continue peut-elle prendre ces valeurs ? Comment donner vie à cet espace des ensembles de cardinal n ?

On sent tout de suite qu'on ne trouvera pas la solution dans les espaces topologiques...

Exemple 3.1 — Espaces avec des catégories de points

Analysons un peu cet espace qu'on appelle Ens_n.

Tentons de comprendre ce que pourrait-être une application continue depuis un espace d'Alexandrov $|C|$ vers Ens_n.

Par adjonction, on a

$$|C| \to Ens_n \quad \Longleftrightarrow \quad C \to pt(Ens_n).$$

Il suffit de deviner ce que pourrait être l'ensemble $pt(Ens_n)$.

La bonne idée est de définir $pt(Ens_n)$ comme le groupoïde Ens_n des ensembles de cardinal n.

C'est-à-dire qu'une application continue $|C| \to Ens_n$ est simplement un C-diagramme d'ensembles de cardinal n.

Exemple 3.1 — Espaces avec des catégories de points

Cette idée est très importante, elle consiste à dire qu'il faut penser les flèches entre ensembles comme des morphismes de générisation.

Et donc qu'il doit y avoir une notion d'espace ayant des catégories de points plutôt que des ensembles ordonnées.

Quand on y réfléchit, c'est le cas de tous les espaces qui classifient des objets (espaces de modules).

En fait, l'un des apports les plus fondamentaux de la théorie des topos va être de donner un sens à l'espace de tous les ensembles. Ce sera un espace *Ens* dont les points formeront la catégorie *Ens* des ensembles.

Exemple 3.2 — Espaces avec des catégories de points

Soit G un groupe discret agissant sur un espace topologique X.

Pour que le quotient se comporte bien dans les espaces topologiques (c'est-à-dire pour que l'application quotient $X \to X/G$ soit un G-fibré), il faut que l'action de G soit

- propre (orbites sans points d'accumulation)
- et libre (pas de stabilisateur)

Les exemples 2.1 et 2.1 étaient des actions libres mais non propres.

Exemple 3.2 — Espaces avec des catégories de points

Étudions le cas le plus dégénéré d'action non-libre : celle d'un groupe G sur un seul point $\star$.

Dans les espaces topologiques, le quotient est un point.

Mais les considérations de l'exemple 3.1 permettent de deviner à quoi devrait ressembler le véritable quotient, noté BG.

Ses points devraient former la catégorie a un élément avec le groupe G comme groupe d'automorphismes.

$$pt(BG) = \star \circlearrowleft G$$

Autrement dit, dans le quotient BG, les éléments de G deviennent des morphismes de générisation du point $\star$ dans lui-même.

Exemple 3.2 — Espaces avec des catégories de points

À quoi ressemble une application continue $X \to BG$?

Il est facile de tester cela sur les espaces d'Alexandrov :

$$|C| \to BG \quad \Longleftrightarrow \quad C \to \begin{tikzcd} \star \arrow[loop right, "G"] \end{tikzcd} .$$

C'est le choix pour $x \to y$ dans C d'un élément $g(x \to y)$ dans G tel que

$$g(x \to y \to z) = g(y \to z) g(x \to y).$$

Autrement dit, c'est un cocycle de C dans G.

C'est en fait l'interprétation générale attendue : les $X \to BG$ doivent être la même chose que les G-cocycles de X.

$$C^0(X, BG) = Z^1(X, G)$$

Exemple 3 — Remarques

De tels espaces ayant des catégories de points doivent être pensés comme des espaces très non-séparés !

- Non seulement ils ont des générisations entre leur points,
- mais il peut exister *plusieurs* générisations entre deux points

$$X \rightrightarrows Y,$$

- pire, les générisations peuvent aller dans les deux entre deux points ou être des *auto*-générisations

$$\circlearrowright X \rightleftarrows Y \circlearrowleft .$$

On est à des années-lumières des espaces de Hausdorff ! Et pourtant de tels espaces sont légion (quasiment tous les espaces de modules). Leur intégration dans la topologie est une révolution immense de la notion d'espace.

Exemple 3 — Remarques

Dernière remarque avec les espaces ayant des catégories de points : ils ne peuvent pas avoir assez d'ouverts, mais en un sens nouveau.

En effet, si X est un tel espace avec une catégorie C de points, une application continue $X \to S$ induit au niveau des points un foncteur

$$C \to \{0 \to 1\}$$

Or un tel foncteur ne peut pas capturer la multiplicité des flèches entre deux objets de C :

- si $C = \star \rightrightarrows \bullet$, les deux flèches de C sont nécessairement écrasés en une même flèche ;
- et si $C = \star \circlearrowleft G$, toutes les éléments de G sont écrasés sur l'identité de 0 ou 1.

Autrement dit, les fonctions à valeurs dans S ne permettent pas de séparer les flèches de C.

Exemple 3 — Remarques

Afin de pouvoir séparer les flèches de C, il va falloir considérer des fonctions vers un espace "plus gros" qui admette une véritable catégorie E de points et non un ensemble ordonné. Il faut trouver une catégorie qui permette de séparer toutes les catégories C, le candidat évident est la catégorie *Ens* des ensembles.

L'idée fondamentale de la théorie des topos est la suivante : on va remplacer l'espace de Sierpiński S par *l'espace des ensembles Ens*.

Autrement dit, on va étudier les espaces non plus seulement par les ensembles ordonnés de fonctions $C^0(X, S)$ mais par les catégories de fonctions $C^0(X, Ens)$.

Une fonction continue $X \to Ens$ s'appelle un faisceau ou un morphisme étale sur X.

Le but (et le succès) de la théorie des topos est de construire un contexte ou de telles fonctions font sens.

Exemple 3 — Remarques

De même que la structure de $C^0(X,S)$ s'axiomatise en la structure de treilli distributif complet et donne dualement la théorie des locales, celle des catégories $C^0(X,Ens)$ s'axiomatise en celle de logos et donne dualement la théorie des topos.

Ensembles ordonnés	*Catégories*
espace de Sierpiński S	espace des ensembles Ens
ouvert $X \to S$	morphisme étale/faisceau $X \to Ens$
treilli distributif complet $O(X) = C^0(X,S)$	logos de faisceaux $Sh(X) = C^0(X,Ens)$
locales	topos

Exemple 3 — Remarques

On peut comparer cela avec d'autres approches de l'espace par des notions de fonctions (observables).

Valeurs des fonctions	*Structure des fct.*	*Type d'espace*
Esp. de Sierpiński	Treilli dist. comp.	Locale
Esp. des ensembles	Logos	Topos
Esp. des ∞-groupoïdes	Logos supérieur	Topos supérieur
$\{0,1\}$ discret	Alg. Boole	Espace de Stone
$\mathbb{R}_{top}$	C^0-ann.	Variété topologique
$\mathbb{R}_{diff}$	C^∞-ann.	Variété différentielle
$\mathbb{C}_\star$	$C^\star$-alg.	Esp. compact Haus.

Exemple 3 — Remarques

Les communications entre ces types d'espaces sont liées à des comparaison entre les espaces de valeurs des fonctions :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[dr, "\chi_{\mathbb{R}^*}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\chi_{\mathbb{C}^*}"] & & \\
 \{0,1\}_{dis} \arrow[rr] & & S & Ens \arrow[l, "\pi_{-1}"'] & \underline{\infty\text{-}Gpd} \arrow[l, "\pi_0"']
\end{tikzcd}$$

Le fait que toutes les flèches ci-dessus pointent vers S explique l'importance de la notion de locale (et celle de la notion proche d'espace topologique).

Les transferts de structures le long de ces morphismes sont ce qu'on appelle des spectres.

Bilan

On vient de voir trois exemples d'espaces pathologiques :

1. les espaces sans assez de points (pour lesquels une définition utilisant un ensemble de points est insuffisante)
2. les espaces sans assez d'ouverts (pour lesquels une définition utilisant une algèbre d'ouverts est insuffisante)
3. les espaces avec des catégorie de points (pour lesquels il faut une définition partant d'une catégorie de points)

Bilan

Pathologique, signifie en fait que les outils de la topologie générale sont insuffisants.

Il faut donc de nouvelles méthodes pour faire rentrer ces espaces dans la topologie générale.

Les topos constituent une réponse capable d'englober les trois exemples précédents.

Ce n'est pas la seule, les faisceaux et champs (stacks) permettent aussi de faire une place à ces espaces et davantage. On en dira un mot en conclusion.

Bilan — L'espace des espaces

Les trois points précédents permettent de dresser un tableau à 3 entrées des espaces possibles.

Ens. ord. de points	*Assez de points*	*Pas assez de points*
Assez d'ouverts	Esp. topologique	Locales $(P(E)/\mu)$
Pas assez d'ouverts	? $(\mathbb{T}_\alpha)$	? $(\mathbb{R}/\mathbb{R}_{dis}?)$

Catégories de points	*Assez de points*	*Pas assez de points*
Assez de mor. étales	? (Ens, BG)	Topos
Pas assez de mor. étales	?	?

Bilan — L'espace des espaces

Table définitive.

Ens. ord. de points	*Assez de points*	*Pas assez de points*
Assez d'ouverts	Esp. topologique	Locales $(P(E)/\mu)$
Pas assez d'ouverts	« Faisceaux géométriques »	

Catégories de points	*Assez de points*	*Pas assez de points*
Assez de mor. étales	Topos avec pt. (Ens, BG)	Topos
Pas assez de mor. étales	« Champs géométriques »	

III — TOPOS

Exemples de topos

Avec tout ce que j'ai dit, vous devriez comprendre ce que doit être un topos : un espace X

- ayant une catégorie de points $pt(X)$,
- défini par la structure de sa catégorie $Sh(X)$ de fonctions continues à valeurs dans l'espace des ensembles.

Je n'ai pas encore donné un seul exemple de topos !

On va se rattraper.

Vocabulaire

On va introduire un vocabulaire non standard mais indispensable.

La littérature classique utilise le même mot « topos » pour désigner X ou $Sh(X)$. Il est préférable d'avoir deux termes différents.

Dans la théorie des locales, on a la dichotomie locales/treillis.

Lorsqu'un espace X est vu comme un topos, on appellera la catégorie $Sh(X)$ du nom de logos de X.

Géométrie	*Algèbre*
Locales	Treillis DC
X	$O(X) = C^0(X, S)$
Topos	Logos
X	$Sh(X) = C^0(X, Ens)$

Le choix du vocabulaire topos/logos, est un jeu de mots sur topo-logie.

Exemples de topos — Le topos d'un espace

Si X est un espace topologique, on considère $Top_{/X}$ la catégorie des espaces au-dessus de X.

$$Top_{/X} = \{Y \to X\}$$

L'algèbre des ouverts $O(X)$ peut se voir comme la sous-catégorie pleine de $Top_{/X}$:

$$O(X) \subset Top_{/X}$$

dont les objets sont les immersion ouvertes $U \to X$.

Exemples de topos — Le topos d'un espace

De même le logos de X, qui se définit classiquement en termes de faisceaux, se comprend beaucoup plus simplement en termes de la sous-catégorie pleine de $Top_{/X}$

$$Sh(X) = Et_{/X} \subset Top_{/X}$$

dont les objets sont les morphismes étales (ou homéomorphismes locaux) $E \to X$ (cf. Godement).

On a bien sûr une inclusion

$$O(X) \subset Sh(X).$$

De manière générale, tout logos *peut et doit* se penser comme une catégorie de morphismes étales au-dessus d'un certain espace.

Exemples de topos — Le topos d'un espace

Voici comment on peut comprendre un morphisme étale comme une fonction dans *Ens*.

Le rapport entre un ouvert et sa fonction génératrice est le pullback suivant

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "\text{ouvert}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \{1\} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\chi_U"] & S \end{tikzcd} \qquad \chi_E(x) = \text{fibre } U_x \ (= \varnothing \text{ ou } \{1\})$$

De même on peut considérer le pullback suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d, "\text{étale}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Ens_{\bullet} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\chi_E"] & Ens. \end{tikzcd} \qquad \chi_E(x) = \text{fibre } E_x$$

Exemples de topos

On continue avec les exemples :

Topos	*Logos*
esp. top. X	$Sh(X) = Et_{/X}$
point $\star$	$Sh(\star) = Ens$
esp. discret E_{dis}	$Sh(E_{dis}) = Ens_{/E} = Ens^E$
esp. Alex. $\lvert C \rvert$	$Sh(\lvert C \rvert) = [C, Ens]$
?	$[C, Ens]$ (C cat.)

Il faut trouver un nom pour les topos correspondant aux logos de préfaisceaux...

Exemples de topos — Préfaisceaux

Étudions un peu les topos correspondant aux logos de préfaisceaux $[C, Ens]$.

C'est le premier exemple de topos qui ne soit pas un espace topologique.

Ce sont des objets proches des espaces d'Alexandrov.
Leurs points devraient former la catégorie C (on verra en fait qu'ils forment la catégorie $Ind(C)$).

Un cas particulier est $C = G$ un groupe, on retrouve que la catégorie Ens^G des actions de G est un logos. Dans ce cas, on peut montrer que ses points sont bien la catégorie $\star \circlearrowleft G$.

Exemples de topos — Préfaisceaux

Un morphisme $|C| \to X$ correspond à un diagramme $C \to pt(X)$

Si X est un espace $pt(X)$ est un ensemble ordonné et $C \to pt(X)$ écrase la structure de catégorie de C.

Si C est un ensemble ordonnée, un morphisme $X \to |C|$ était une stratification de X.

$$O(|C|) = [C, S] \to O(X) \quad \Longleftrightarrow \quad C^{op} \to O(X) \quad (+\text{ cdt})$$

Si C est une catégorie, un morphisme $X \to |C|$ sera donné par un diagramme (plat) de faisceaux.

$$Sh(|C|) = [C, Ens] \to Sh(X) \quad \Longleftrightarrow \quad C^{op} \to Sh(X) \quad (+\text{ cdt plat.})$$

Exemples de topos — BG

Si $C = G$, on peut calculer que $X \to |G| = BG$ correspond à un faisceau avec une action de G

$$Sh(BG) \to Sh(X) \iff G \to Sh(X) \quad (+\ \mathrm{cdt})$$

tel que cette action soit libre et transitive, c'est-à-dire la donnée d'un G-torseur.

Cela est compatible avec l'idée que

$$C^0(X, BG) = Z^1(X, G).$$

Cette interprétation géométrique des cocycles est très plaisante. Les topos absorbent naturellement les notions de cohomologie non-abéliennes.

Exemples de topos — BG

On peut prouver les résultats suivant sur BG.

- Les morphismes de topos $X \to BG$ sont bien donnés par des G-torseurs $P \to X$.
- Le morphisme quotient $\star \to BG$ devient un revêtement galoisien de groupe G dans les topos.
- On peut aussi prouver que $\pi_1(BG) = G$ et $\pi_n(BG) = 0$ (les groupes d'homotopie font sens pour les topos). C'est-à-dire que BG a le type d'homotopie d'un $K(G, 1)$.

Exemples de topos — BG

La propriété que $\star \to BG$ devient un revêtement galoisien est assez amusante.

Elle signifie que les fibres de ce morphisme est une copie de G.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \star \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

Pour le comprendre il faut apprendre à calculer des produits fibrés dans les catégories

Exemples de topos — BG

Considérons un produit fibré de catégories

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & D \end{tikzcd}$$

La catégorie A se décrit comme suit

- ses objets sont les triplets $(b, c, f : \beta(b) \simeq \gamma(c))$
- ses morphismes sont les paires $(b \to b', c \to c')$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \beta(b) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \gamma(c) \arrow[d] \\ \beta(b') \arrow[r, "f'"] & \gamma(c'). \end{tikzcd}$$

Exemples de topos — BG

Dans le cas de

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \star \arrow[d] \\ \star \arrow[r] & \star \arrow[loop right, "G"] \end{tikzcd}$$

La catégorie A est ainsi :

- ses objets sont les éléments de G (pensés comme isomorphismes $g : \star \simeq \star$)
- les seuls morphismes sont les identités.

Ces nouvelles manières de calculer des produits fibrés font partie des nouveautés nécessaires avec les espaces dont les points forment des catégories.

Exemples de topos — $\mathbb{T}_\alpha$

Revenons à notre exemple du tore irrationnel $\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha)$.

On a vu qu'il manquait d'ouverts

$$O(\mathbb{T}_\alpha) = \{\varnothing \to 1\}.$$

On va montrer qu'il possède assez de morphismes étales.

On procède par descente. Supposons qu'on sache ce qu'est un morphisme étale $E \to \mathbb{T}_\alpha$. On peut le tirer en arrière sur $\mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "\text{étale}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & E \arrow[d, "\text{étale}"] \\ \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{T}_\alpha \end{tikzcd}$$

pour obtenir un élément de $Sh(\mathbb{R})$.

Exemples de topos — $\mathbb{T}_\alpha$

Si le quotient était sympa (propre), E' serait muni d'une action de $\mathbb{Z}^2$ et la projection $E' \to \mathbb{R}$ serait équivariante.

Cela amène à considérer la catégorie $Sh(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^2}$ des faisceaux $\mathbb{Z}^2$-équivariants sur $\mathbb{R}$.

Cette catégorie est non-triviale (non-équivalente à *Ens*), car l'action $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en définit un élément.

En fait, c'est un logos et on pose

$$Sh(\mathbb{T}_\alpha) = Sh(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^2}.$$

Exemples de topos — $\mathbb{T}_\alpha$

C'est un peu formel, mais voici quelques conséquences de cette définition.

- Les morphismes de topos $X \to \mathbb{T}_\alpha$ sont bien donnés par des diagrammes $X \leftarrow P \to \mathbb{R}$ comme en 2.1.
- Le morphisme quotient $\mathbb{R} \to \mathbb{T}_\alpha$ devient un revêtement galoisien de groupe $\mathbb{Z}^2$ dans les topos.
- On peut aussi prouver que $\pi_1(\mathbb{T}_\alpha) = \mathbb{Z}^2$ et $\pi_n(\mathbb{T}_\alpha) = 0$ (les groupes d'homotopie font sens pour les topos). C'est-à-dire que $\mathbb{T}_\alpha$ a le type d'homotopie d'un tore.

Il faut comparer ces propriétés avec celles de BG données plus haut.

Exemples de topos — Actions de groupe

La théorie des topos est particulièrement sympathique pour les quotients d'actions de groupes discrets G.

Sans aucune hypothèse (finies les contraintes de propreté et de liberté !) sur l'action, le topos quotient X/G se décrit par le logos des faisceaux équivariants sur X

$$Sh(X/G) = Sh(X)^G.$$

De plus on a toujours les propriétés suivantes

- Les morphismes de topos $Y \to X/G$ sont donnés par des diagrammes $Y \leftarrow P \to X$ où P est un revêtement galoisien de groupe G et $P \to X$ est équivariant.
- Le morphisme quotient $X \to X/G$ est toujours un revêtement galoisien de groupe G.
- Si X est contractible (c'était le cas de $\star$ et $\mathbb{R}$) X/G a le type d'homotopie d'un $K(G,1)$.

Exemples de topos — Actions de groupe

On peut justifier un peu d'où vient la formule pour décrire les morphismes $Y \to X/G$.

Si on a un tel morphisme, on définit P par le produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\text{étale + rvt galois.}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d, "\text{étale + rvt galois.}"] \\ Y \arrow[r] & X/G \end{tikzcd}$$

Le fait que $P \to Y$ soit un revêtement galoisien de groupe G est dû à la stabilité de ces objets par changement de base.

L'équivariance est une condition de descente.

Exemples de topos — Le topos des ensembles

C'est le topos le plus important. Je le note *Ens*.

La grande idée derrière la notion de topos est que les ensembles sont les points d'un espace !

Autrement dit, il existe une structure topologique sur la catégorie des ensembles.

Bien sur, cette "topologie" ne peut pas se décrire avec la technologie des ouverts, l'espace des ensembles n'est pas un espace topologique.

Mais, alors comment se convaincre que cet espace existe ?

Exemples de topos — Le topos des ensembles

Comment se convaincre que les ensembles sont les points d'un espace *Ens* ?

Il suffit de comprendre ce qu'est une fonction continue ou discontinue

$$X \to \mathbb{A}.$$

Une fonction continue, on l'a déjà dit, c'est un faisceau sur X, c'est-à-dire un espace étalé $Y \to X$.

Mais il y a aussi des fonctions discontinues $X \to \mathbb{A}$, par exemple, l'inclusion d'un fermé $Z \hookrightarrow X$. Plus généralement, toute fonction continue $Z \to X$ dont les fibres ont une topologie discrète définie une fonction à valeurs dans les ensembles, mais elle n'est continue que si c'est un homéomorphisme local.

Exemples de topos — Le topos des ensembles

On peut ainsi parler des chemins dans le topos *Ens*.

Ce sont les fonctions continues $[0,1] \to Ens$.

C'est-à-dire les faisceaux sur $[0,1]$.

IV — CONCLUSION

Conclusion

Je n'ai toujours pas donné la définition d'un topos.

Je ne la donnerai pas, ce sera le but de mon second exposé.

Mais si vous commencer à cerner ce qu'est un topos, mon but est atteint.

Faisons un petit bilan.

Conclusion

Pour comprendre la notion de topos,

1. il faut comprendre qu'il existe une notion d'espace dont les points forment des catégories et non plus des ensembles ordonnés ;
2. il faut accepter que, dans l'histoire de la formalisation de la spatialité, la notion d'ouvert était une victoire provisoire, une étape, et non le dernier mot (la notion de morphisme étale n'est pas non plus la fin de l'histoire) ;
3. il faut renoncer à prescrire les ensembles de points des espaces et à la notion de topologie sur un ensemble ;
4. procéder ainsi dégage mieux le fait que la topologie générale est en fait une algèbre commutative.

Conclusion

La représentation des ouverts et des faisceaux sur X en termes d'espaces au-dessus sur X est très importante.

Elle dit qu'on étudie un espace X uniquement à l'aide d'autres espaces.

Les structures de treilli ou de logos axiomatisent le calcul naturel qui existe sur les classes d'immersions ouverte ou de morphismes étale.

Autrement dit, on est bien en train de faire de la topologie générale : on étudie la structure topologique sans en sortir.
(Par opposition, disons, à la géométrie différentielle où la structure d'anneau de $\mathbb{R}$ joue un rôle central.)

D'un point de vue structuraliste (au sens des sciences humaines) c'est très satisfaisant : on a un corpus qui s'auto-analyse.

Conclusion

La topologie classique étudie les espaces en distinguant la classe des immersions ouvertes.

La notion de locale s'obtient en axiomatisant la structure de treillis des ensembles ordonnés $O(X)$ d'ouverts sur un espace topologique

L'oubli de la prescription des points rend la catégorie des locales plus sympa que celle des espaces topologiques.

Car on gagne la possibilité de manipuler les treillis d'ouverts par générateur et relations (c'est-à-dire de faire de l'algèbre commutative).

C'est là que le lien se fait avec la logique car ces générateurs et relations peuvent se comprendre comme des théories propositionnelles.

$$\text{générateurs} = \text{ensemble de propositions}$$
$$\text{relations} = \text{axiomes (forcing)}$$

Conclusion

La topologie topossique étudie les espaces en distinguant la classe des morphismes étales.

La notion de topos s'obtient en axiomatisant la structure de logos des catégories $Sh(X)$ de faisceaux sur un espace topologique.

Comme avec les treillis, la structure de logos permet encore de travailler par générateur et relations (c'est-à-dire de faire de l'algèbre commutative).

Le lien se fait avec la logique est encore plus fort car ces générateurs et relations peuvent se comprendre comme des théories logiques typées. C'est le point de vue des topos classifiants.

générateurs = catégorie de types
relations = axiomes (forcing)

Les intuitions fondamentales

Intuition géométrique pour le géomètre (Grothendieck...)
Topos = espace défini par la catégorie des morphismes étales au-dessus de lui.

Intuition géométrique pour le logicien (Lawvere...)
Topos = catégorie d'ensembles paramétrés continument par les points d'un espace topologique.

Synthèse
Topos = dual d'un logos.
Logos = "anneau" de fonctions continues à valeurs dans l'espace des ensembles *Ens*.

Conclusion

J'ai profité du fait que je parle dans un séminaire de philosophie des sciences pour poser quelques points d'épistémologie mathématique.

1. Qu'on peut expliquer des notions très avancées de maths sans être technique. Il suffit de se laisser porter par le sens des choses et quelques exemples.
2. Que les maths ont peu à voir avec la logique. Elles sont une phénoménologie qui s'appuie sur une matière concrète (des exemples, des manipulations, des calculs, des dessins sur des tableaux, des comparaisons entre constructions différentes pour faire une même chose, le dégagement de structures communes à un certain nombre de situations... bref les mêmes trucs que partout ailleurs).
3. J'ai voulu montrer, en fait, la matière d'où sortent les maths. De même qu'en physique on construit (par l'expérience) et re-construit (par la théorie) une réalité, on construit (exemples, dégagement de concepts) et re-construit (axiomatisation) une réalité en mathématiques.

Merci !

– Lecture II –

Les topos en analogie
avec les anneaux commutatifs
— 1 —

Dans le premier exposé, on a établi un double vocabulaire :

- Logos = catégorie de fonctions continues à valeurs dans l'espace *Ens* des ensembles.
- Topos = espace dont la structure est complètement capturé par son logos.

Dans cet exposé, on va se concentrer sur la face algébrique de la théorie des topos, c'est-à-dire la théorie des logos.

Et on va donner des définitions :)

Le but de l'exposé est de construire un parallèle entre la théorie des logos et celle des anneaux commutatifs.

Le premier tableau de comparaison qu'il faut avoir en tête est le suivant

Anneaux commutatifs	Treillis (Frames)	Logos
Schémas affines	Locales	Topos

PLAN

I — TOPOS & LOGOS

Logos

Il existe plusieurs définitions classiques des logos.

- axiomes de Giraud
- axiomes de descente de Rezk
- localisations exacte à gauche de catégories de préfaisceaux
- faisceaux sur un site
- axiomes de Lawvere (cat. LCC avec classifiant des monomorphismes)
- ...

On va se concentrer sur celle de Giraud, car c'est elle qui rend le plus visible l'analogie avec des anneaux.

Logos

Un logos est

1. une catégorie présentable (en part. avec lim finies et colim)
2. avec des colimites universelles (cat. LCC)

$$\operatorname{colim}(X_i \times_X Y) \simeq (\operatorname{colim} X_i) \times_X Y,$$

3. des sommes disjointes

$$X_i \times_{\coprod X_i} X_j = \varnothing,$$

4. et des relations d'équivalences effectives

$$X \times_{X/R} X = R.$$

Pour simplifier, on appellera les conditions 3 et 4 sous le nom de "propriété d'effectivité".

Logos — Effectivité des quotients

La propriété d'effectivité des quotients

$$X \times_{X/R} X = R$$

signifie qu'on peut reconsituer la relation d'équivalence $R \rightrightarrows X$ à l'aide de l'application quotient $X \to X/R$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & X \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X/R \end{tikzcd}$$

Logos — Exemples

- *Ens* est un logos
- si E est un logos et X un objet de E, $E_{/X}$ est un logos
- si E est un logos et C une petite catégorie, $[C, E]$ est un logos
- en part. si G est un groupe, les actions de G forment un topos E^G
- toute localisation exacte à gauche d'un logos est un logos (p.ex. cat de faisceaux $Sh(X)$)
- avec ces deux derniers exemples, on retrouve les faisceaux équivariants ($Sh(\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2) = Sh(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^2}$)
- ...

Logos — Morphismes

Un morphisme de logos (ou un morphisme algébrique de topos)

$$f^* : E \longrightarrow F$$

est un foncteur commutant aux limites finies et aux colimites (foncteur cc lex).

Un tel foncteur a automatiquement un adjoint à droite f_* mais on ne va pas s'en servir.

On note *Logos* la catégorie des logos.

Logos — Topos

Comme avec les Treillis et les locales, on définit la catégorie des topos par dualité

$$Topos = Logos^{op}.$$

Les objets de $Logos^{op}$ sont appelés les topos.

Les morphismes dans $Logos^{op}$ sont appelés morphismes de topos (ou morphismes géométriques de topos).

Logos — Comparaison avec les anneaux

Anneaux	Treillis DC	Logos
somme $+$	union $\bigcup$	colimites
0	$\bot$	$\varnothing$
produit $\times$	intersection $\cap$	limites finies
1	$\top$	1
distributivité	distributivité	univ. colimites $+$ effectivité
mor. d'anneaux	fct pres. $\bigcup$ et $\cap$	foncteur cc lex

Il faut justifier ces choix.

Logos — Sommes = colimites

On a fait le choix de toutes les colimites pour remplacer les sommes, il faut le comprendre ainsi.

Dans les anneaux, la somme est une opération dont les arités sont les nombres finis

$$+ : A^n \longrightarrow A.$$

Dans les logos, la colimite est une opération dont les arités sont les petites catégories

$$\mathrm{colim} : E^I \longrightarrow E.$$

En d'autres termes, le rôle des groupes abéliens est joué par les catégories cocomplètes.

(En fait, on se limite à considérer des catégories présentables.)

Logos — Produit = limites

La situation est la même pour les limites finies qui jouent le rôle du produit.

Dans les anneaux, le produit est une opération dont les arités sont les nombres finis

$$\times : A^n \longrightarrow A.$$

Dans les logos, la limite est une opération dont les arités sont les catégories finies

$$\lim : E^I \longrightarrow E.$$

En d'autres termes, le rôle des monoïdes abéliens est joué par les catégories lex (ayant toutes les limites finies).

Logos — Distributivité

L'analogie entre la propriété de distributivité et celle d'universalité des colimites est claire,

$$(a+b)c = ac + bc$$

$$(\operatorname{colim} X_i) \times_Z Y = \operatorname{colim}(X_i \times_Z Y)$$

mais la propriété d'effectivité est plus mystérieuse.

Il faut aussi la penser aussi comme une forme de distributivité.

La chose devient plus claire avec la notion de topos supérieur.

On en parlera dans le troisième exposé.

Logos

On peut compléter notre tableau de comparaison.

Anneaux morphisme d'anneaux	Logos foncteur cc lex
Groupes abéliens morphisme	Catégories présentables foncteur cocontinu (cc)
Monoïdes commutatifs morphisme	Catégories lex foncteur lex
Ensembles applications	Catégories foncteur

Catégories présentables

L'analogue des groupes abéliens est la notion de catégorie présentable avec les foncteurs cocontinus comme morphismes.

Une catégorie présentable A peut se définir comme est une localisation d'une catégorie de préfaisceaux

$$L : Pr(C) \longrightarrow L(Pr(C), W) = A$$

telle que L soit un foncteur cocontinu.

Il faut comparer cela avec le fait que tout groupe abélien A est quotient d'un groupe abélien libre

$$\mathbb{Z}.E \longrightarrow A.$$

On a des adjonctions

$$\begin{tikzcd} Ens \arrow[r, shift left, "mon.\ libre"] & Ab \arrow[l, shift left, "oubli"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Cat \arrow[d] \arrow[drr, "Pr(-)"] & & \\ CAT & & Ab \arrow[ll, "oubli"] \end{tikzcd}$$

Catégories présentables

La catégorie des groupes abéliens est additive :

- les hom sont des groupes abéliens
- les produits et sommes coïncident.

C'est la même chose dans les catégories présentables

$$[Pr(C), Pr(D)]_{cc} = [C \times D^{op}, Ens] = Pr(C^{op} \times D)$$

le Hom entre deux catégories présentables est une catégorie présentable.

Sommes/produits :

$$Pr(C) \oplus Pr(D) = Pr(C) \times Pr(D) = Pr(C \coprod D)$$

Les inclusions/projections $Pr(C) \longrightarrow Pr(C \coprod D) \to Pr(C)$ sont données par $C \to C \coprod D$ et $D \coprod C \to \{1\} \coprod C \subset Pr(C)$.

Catégories présentables

Mais surtout, on a un produit tensoriel de groupes abéliens.
Il est défini par une propriété universelle :

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\text{bilinéaire}"] \arrow[dr, "\text{bilinéaire univ.}"'] & & C \\ & A \otimes B \arrow[ur, dashed, "\exists !", "\text{linéaire}"'] & \end{tikzcd}$$

On a toujours

$$\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) = \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$$

et

$$\mathbb{Z}.E \otimes \mathbb{Z}.F = \mathbb{Z}.(E \times F).$$

En général $A \otimes B$ est construit ainsi

$$\mathbb{Z}(A \times B) /\!\!/ (a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, \ldots .$$

Catégories présentables

On a aussi un produit tensoriel de catégories présentables
Il est aussi défini par une propriété universelle :

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\text{bicocontinu}"] \arrow[dr, "\text{bicocontinu univ.}"'] & & C \\ & A \otimes B \arrow[ur, dashed, "\exists !", "\text{cocontinu}"'] & \end{tikzcd}$$

On a toujours

$$[A \otimes B, C]_{cc} = [A, [B, C]_{cc}]_{cc}$$

et

$$Pr(C) \otimes Pr(D) = Pr(C \times D)$$

En général $A \otimes B$ est construit ainsi

$$Pr(A \times B) /\!\!/ (\mathrm{colim}\, a_i) \otimes b = \mathrm{colim}(a_i \otimes b), \ldots.$$

(j'oublie les problèmes de tailles).

Logos

Revenons au tableau de comparaison

Anneaux morphisme d'anneaux	Logos foncteur cc lex
Groupes abéliens morphisme	Catégories présentables foncteur cocontinu (cc)
Monoïdes commutatifs morphisme	Catégories lex foncteur lex
Ensembles applications	Catégories foncteur

Logos

Le tableau précédent va de pair avec des foncteurs d'oubli de structure

$$\begin{tikzcd} Ann \arrow[r] \arrow[d] & Ab \arrow[d] \\ Mon \arrow[r] & Ens \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Logos \arrow[r] \arrow[d] & Pres \arrow[d] \\ CAT^{lex} \arrow[r] & CAT \end{tikzcd}$$

où

- CAT est la catégorie des catégories,
- CAT^{lex} est la catégorie des catégories avec limites finies
- et $Pres$ est la catégorie des catégories présentables.

Logos libre

Théorème (Bunge + ?) Les foncteurs d'oublis précédents ont des adjoints à gauche partiels (définis pour les petites catégories seulements).

$$\begin{tikzcd} Ann & & Ab \arrow[ll, "Sym(-)"'] \\ Mon \arrow[u, "\mathbb{Z}(-)"] & & Ens \arrow[ll, "mon.\ libre"] \arrow[u, "\mathbb{Z}(-)"'] \arrow[ull, "\mathbb{Z}[-]"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Logos & & Pres \arrow[ll, "Sym(-)"'] \\ Cat^{lex} \arrow[u, "Pr(-)"] & & Cat \arrow[ll, "(-)^{lex}"] \arrow[u, "Pr(-)"'] \arrow[ull, "Ens[-]"] \end{tikzcd}$$

où

- Cat est la catégorie des petites catégories,
- $Pr(-)$ est le foncteur des préfaisceaux,
- $Sym(-)$ est le "topos symétrique" (Lawvere, Bunge),
- et $Ens[-]$ est le foncteur de logos libre.

Logos libre

La commutation du carré précédent donne la construction suivante du logos libre sur une petite catégorie C :

1. compléter C librement pour les limites finies en C^{lex}
2. compléter C^{lex} librement pour les colimites en $Pr(C^{lex})$.

Faisons ça pour $C = \{x\}$.

Logos libre à 1 générateur

Le topos libre sur un générateur x est

$$Ens[x] = Pr(Fin^{op}) = [Fin, Ens]$$

où Fin est la catégorie des ensembles finis (Fin^{op} est la complétion libre de $\{x\}$ pour les limites finies).
Les objets de $Ens[x]$ s'écrivent formellement

$$\operatorname*{colim}_j \lim_i x = \operatorname*{colim}_j x^{K_j}$$

comme des sorte de polynômes.

Il faut comparer cela avec la construction de l'anneau libre sur 1 générateur x :

1. prendre le monoïde commutatif libre $M(x) = \mathbb{N}$ sur x
2. prendre le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}.M(x)$ sur $M(x)$.

Les éléments de $\mathbb{Z}[x]$ s'écrivent formellement

$$\sum x^n$$

ce sont des polynômes.

Logos libre

Vérifions la propriété du logos libre.

Soit E un logos, on a des équivalences entre

$$\begin{array}{rcll} Pr(C^{lex}) & \longrightarrow & E & \text{foncteur cc lex} \\ C^{lex} & \longrightarrow & E & \text{foncteur lex} \\ C & \longrightarrow & E & \text{foncteur.} \end{array}$$

La première étape est vraie car l'extension de Kan à gauche

- depuis une catégorie lex
- à valeurs dans une catégorie où les colim sont universelles

préserve les limites finies

Logos enveloppants

Dans le langage de l'Éléphant (Johnstone), Cat^{lex} est la catégorie des théories cartésiennes.

Pour une telle théorie, le logos $Pr(\mathbb{T})$ est son logos enveloppant.

On peut aussi considérer la catégorie $Cat^{\times}$ des théories de Lawvere. On a une factorisation

$$\begin{tikzcd} Cat^{lex} & & Cat. \arrow[ll, "(-)^{lex}"'] \arrow[dl, "(-)^{\times}"] \\ & Cat^{\times} \arrow[ul, "(-)^{lex/\times}"] & \end{tikzcd}$$

Le logos $Pr(\mathbb{L}^{lex/\times})$ est le logos enveloppant de la théorie de Lawvere $\mathbb{L}$.

Logos = Anneaux

Cette analogie pose des questions évidentes

1. Quels sont les analogues des notions de quotient, d'idéaux ?
2. Quels sont les analogues des localisations d'anneaux ?
3. Quels sont les analogues des modules ?
4. Quels sont les analogues du calcul différentiel ? de la théorie de la mesure ?
5. Y a-t-il un analogue des schémas non-affines ?...

Ces questions n'ont pas encore toute de réponse précise ou définitive, c'est une part de mon programme de recherche que d'y répondre.

Logos = Anneaux

Quelques éléments de réponse

1. quotient = localisation exacte à gauche
2. localisations d'anneaux → ouverts & étales de topos
3. calcul différentiel sont liés au calcul de Goodwillie
4. théorie de la mesure est liée à la dualité de Verdier
5. schémas non-affines = champs

Logos = Anneaux

Pour le reste de l'exposé, on va se concentrer sur une seule de ces questions : la notion de quotient.

C'est important car ce qui va permettre de construire tout les topos.

De même que

- tout anneau A est un quotient d'un anneau libre $\mathbb{Z}[E]$,
- tout logos $\mathcal{E}$ est un quotient d'un logos libre $S[C]$.

II — QUOTIENTS

Quotients de logos

On sait construire les logos libres, on pourra savoir décrire tous les logos si on sait construire tous les quotients.

La notion de quotient qui s'impose dans la manipulation des topos est celle de localisation exacte à gauche.

Plus généralement, il faut penser la notion de localisation de catégorie comme un quotient : on force des objets à devenir égaux.

(Le choix du terme "localisation" a été malheureux, il cache la véritable nature de cette opération.)

Localisations de catégories

La théorie des localisations de catégories générales est assez complexe (il faut des structures d'intervalle, de fractions ou de modèles pour arriver à décrire la catégorie localisée).

Mais la situation se simplifie si les catégories sont supposée présentable.

Dans ce contexte, il y a le truc génial que le foncteur de localisation $C \to L(C, W)$ admet toujours un adjoint à gauche pleinement fidèle.

On peut donc décrire la localisation comme une sous-catégorie de C !

Pour cela il faut rappeler les notions d'orthogonalité et de système de factorisation dans une catégorie.

Orthogonalité

Deux flèches $u : A \to B$ et $f : X \to Y$ sont dites orthogonales (on note $u \perp f$) si tout carré commutatif

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y
\end{tikzcd}
$$

admet un relèvement unique.

Si C est une catégorie, on note $C^{\to}$ sa catégorie des flèches.
Deux sous-catégories $L \subset C$ et $R \subset C$ sont dites orthogonales (on note $L \perp R$) si

$$\forall u \in L, \quad \forall f \in R, \qquad u \perp f.$$

Orthogonalité et localisation cc

Soit C une catégorie présentable et $L : C \to L_{cc}(C, W)$ une localisation cocontinue, alors L admet un adjoint à droite ι pleinement fidèle.

On dit qu'un objet X de C est local si

$$W \quad \perp \quad (X \to 1).$$

On abrège $W \perp X$ et on note $Loc(W)$ la catégorie des objets locaux.

Pour tout objet X, l'objet ιLX est local et l'unité $X \to \iota LX$ est la réflexion de X dans la sous-catégorie des objets locaux.

Théorème $Loc(W) \simeq L_{cc}(C, W)$.

Localisation de logos

Une localisation d'un logos E est un morphisme de logos $E \to F$ qui est une localisation de catégorie présentables.

Autrement dit, une localisation de logos est une localisation $L : E \to F$ qui est un foncteur cocontinu et exact à gauche.

On a vu comment calculer des localisations de catégorie présentable

$$L_{cc}(C, W) = \{\text{objets locaux}\}$$

Grande question de la théorie des logos : décrire les localisations exactes à gauche engendrée par une classe de flèches W.

$$L_{cc}^{lex}(E, W) = \{\text{objets ?}\}$$

Localisation de logos

Théorème (A, ABFJ)

1. Si W est stable par limites finies dans $E^{\to}$, alors

$$Loc(W) \simeq L_{cc}^{lex}(E, W).$$

2. Si W est stable par diagonales et changement de base, alors

$$Loc(W) \simeq L_{cc}^{lex}(E, W).$$

Rappel : la diagonale d'un flèche $f : X \to Y$ est la flèche $\Delta f : X \to X \times_Y X$. Les diagonales supérieures sont définies par induction $\Delta^{n+1} f = \Delta(\Delta^n f)$.

Localisation de logos

Supposons que W soit une unique flèche $w : A \to B$ (on peut toujours s'y ramener).
On définit

$$w' = \coprod_n \Delta^n w.$$

Un objet X est dit lex-local si, pour tout changement de base v de w'

$$v \quad \perp \quad X$$

On note $LexLoc(w)$ la catégorie des objets lex-locaux.

Corollaire

$$LexLoc(W) = L^{lex}_{cc}(E, W).$$

Topologie de Grothendieck

Une localisation de logos est topologique si elle peut être engendrée par un monomorphisme $m : A \rightarrowtail B$.

Théorème Toute localisation de logos est topologique

Preuve Pour inverser $w : X \to Y$, il suffit d'inverser le monomorphisme

$$image(w) \coprod image(\Delta w).$$

Inverser $im(w)$ force w à devenir un épimorphisme et inverser $im(\Delta w)$ force w à devenir un monomorphisme. (Ce n'est vrai que parce qu'on considère des localisations exactes à gauche !)

Topologie de Grothendieck

Si w est un monomorphisme, ses diagonales sont des isomorphismes.

Un objet est lex local pour un mono w ssi il est orthogonal à tout ses changements de base

Corollaire

$$L^{lex}_{cc}(E, A \rightarrowtail B) = \{X \mid \forall \text{ chgt de base } m' \to m,\ m' \perp X\}$$

Construction de topos

On peut maintenant construire tous les logos en analogies avec les anneaux.

1. On se donne une catégorie X de générateurs.
2. On construit le logos libre $Ens[X] = Pr(X^{lex})$. Les éléments sont des sortes de polynômes en les objets de x.
3. Une relation est un morphisme $f : A \to B$ dans $Ens[X]$. Il faut y penser comme une équation égalisant deux polynômes.
4. Le logos quotient $Ens[x]/\!\!/f$ se construit comme la catégorie des objets lex-locaux pour f.

La donnée (X, f) est une alternative à la notion de site.

Elle a l'avantage de marcher aussi pour les topos/logos supérieurs (au contraire des sites).

On verra ça dans le prochain exposé.

C'est tout pour aujourd'hui.

Merci !

– Lecture III –

Les topos en analogie avec les anneaux commutatifs

— 2 —

Résumé

On continue avec l'analogie entre topos et anneaux commutatifs.

On arrivera naturellement ainsi à la notion de topos supérieur.

PLAN

I — PRÉSENTATIONS DE TOPOS

Rappels

La dernière fois, on a développé l'analogie entre topos et anneaux.

$$
\begin{tikzcd}
Ann & & Ab \arrow[ll, "Sym(-)"'] \\
Mon \arrow[u, "\mathbb{Z}(-)"] & & Ens \arrow[ll, "mon.\ libre"] \arrow[u, "\mathbb{Z}(-)"'] \arrow[ull, "\mathbb{Z}[-]"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Logos & & Pres \arrow[ll, "Sym(-)"'] \\
Cat^{lex} \arrow[u, "Pr(-)"] & & Cat \arrow[ll, "(-)^{lex}"] \arrow[u, "Pr(-)"'] \arrow[ull, "Ens[-]"]
\end{tikzcd}
$$

où

- Cat est la catégorie des petites catégories,
- $Pr(-)$ est le foncteur des préfaisceaux,
- $Sym(-)$ est le "topos symétrique" (Lawvere, Bunge),
- et $Ens[-]$ est le foncteur de logos libre.

Présentations de topos

On a aussi vu comment construire tous les logos à l'aide d'une présentation (X, r).

- On se donne une catégorie X de générateurs.
- On construit le logos libre

$$Ens[X] = Pr(X^{lex}).$$

  Les éléments sont des "polynômes" $F(x) = \operatorname{colim} \lim x$ en les objets de X.
- Une relation est un morphisme $r : F \to G$ dans $Ens[X]$. Il faut y penser comme une équation égalisant deux polynômes.
- Le logos quotient $Ens[x]/\!\!/f$ se construit comme la catégorie des objets lex-locaux pour r

$$E = Ens[x]/\!\!/f = LexLoc(r) = \left\{F | r' \perp\!\!\!\perp F\right\}.$$

  où $r' = \coprod_n \Delta^n r$ et $\perp\!\!\!\perp$ est l'orthogonalité fibre à fibre.

Présentations de topos

Les présentations (X, r) sont une alternative à la notion de site.
Elle a l'avantage de marcher aussi pour les topos/logos supérieurs (au contraire des sites).

	Site	*Présentation*
Générateurs	cat. de représentables C	cat. de générateurs X
Objet "libre"	$Pr(C)$	$Ens[X] = Pr(X^{lex})$
Relations	topologie τ	relation $r : F \to G$
Quotient	$Pr(C) /\!\!/ \tau = Sh(C, \tau)$	$Ens[X] /\!\!/ r = LexLoc(r)$

Présentations de topos

La différence entre les deux notions peut se comprendre ainsi.

Les relations dans un site sont du type

$$\mathrm{colim}\ \textit{représentables} = \textit{représentable}$$

où la colimite est typiquement donnée par un recouvrement de la topologie.

Les relations dans une présentation sont du type

$$\mathrm{colim}\,\lim\ \textit{générateurs} = \mathrm{colim}\,\lim\ \textit{générateurs}$$

En particulier, cela permet plus facilement d'écrire des conditions multiplicatives. Dans un un site, on est obligé d'intégrer ces conditions à la catégorie des représentables.

Présentations de topos

Exemples :

- Si S est l'espace de Sierpiński, on a
$$Sh(S) = Ens[X] /\!\!/ X \to X \times X$$
- Quotient ouvert :
$$E /\!\!/ U \rightarrowtail 1$$
- Quotient fermé complémenté : pour A dans E
$$E /\!\!/ \varnothing \to A = E /\!\!/ \varnothing \to im(A)$$
-
$$Ens[X \to Z \leftarrow Y] /\!\!/ \varnothing \to X \times_Z Y$$
-
$$Ens[X^\bullet] = Ens[X]/X = Ens[Z \to X] /\!\!/ Z \to 1$$
-
$$Ens[X^\bullet] /\!\!/ X \to \Omega\Sigma X$$
(fait plus de sens dans les topos supérieurs où *Ens* est remplacé par la catégorie des ∞-groupoïdes).

II — POINTS & MODÈLES

Points & modèles

Dans le premier exposé, j'ai expliqué que les topos étaient un type d'espace qui admettaient des catégories de points.

Soit X un topos correspondant au logos E.

Un point de X (ou un modèle de E) est un morphisme de logos

$$x^* : E \xrightarrow{cc \;\; lex} Ens$$

Une générisation entre deux points de X (ou un morphisme entre modèles) est une transformation naturelle

$$x^* \to y^*.$$

On note $pt(X)$ et $mod(E)$ les catégories des points de X et des modèles de E.

Points & modèles

Là encore, il faut remarquer l'analogie avec les anneaux.

Les points (rationnels) d'une k-algèbre A sont les morphismes $A \to k$.

De même qu'un morphisme d'anneaux $A \to B$ est appelé un point à coefficients dans B, on appelle un morphisme de logos

$$E \to F$$

un modèle de E dans F.

Points & modèles

Exemples

- $mod(Ens) = \{\star\}$
- $mod([C, Ens]) = Ind(C)$
- $mod(Ens^G) = \star \circlearrowleft G$
- pour une locale X, on a $mod(Sh(X)) = pt(X)$
- si G agit sur un espace X, $pt(X/G) = pt(Sh(X)^G)$ est le groupoïde d'action $pt(X)//G$. P. ex. $pt(\mathbb{T}_\alpha) = \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha)$ (comme ensemble)
- si $\mathbb{T}$ est une théorie de Lawvere, les modèles de $Pr(\mathbb{T}^{lex/\times})$ sont les modèles de $\mathbb{T}$
- ...

Points & modèles

Question ouverte : dans la théorie des anneaux commutatifs, on appelle point un morphisme $A \to K$ vers un corps K.

Les logos ont-ils une classe d'objets distingués jouant le rôle des corps ?

Une solution est de regarder les "topos simples", définit comme n'ayant aucun sous-topos.

Une autre est de regarder les topos X telle que tout faisceau sur X admet une section globale.

Y a-t-il d'autres exemples que *Ens* ?

Topos local en un point

Il existe toujours un morphisme de logos $e^* : Ens \to E$. Un point est une section de de morphisme.

Le foncteur $\Gamma = e_* : E \to Ens$ est le foncteur des sections globales.

Un logos E est dit local si $\Gamma : E \to Ens$ est un point. Comme Γ commute avec toutes les limites, cela revient à demander qu'il soit cocontinu.

Intuitivement, cela signifie que la catégorie $pt(X)$ possède un élément initial.

Le vocabulaire vient des anneaux locaux (dont les points ont un point initial pour la générisation).

Question : De même qu'on peut factoriser un point d'anneau $A \to K$ en un anneau local $A \to A_{\mathfrak{p}} \to K$, peut-on factoriser un point $E \to Ens$ par un topos local ?

III — CHANGEMENTS DE BASE

Locales & Topos

La théorie des topos agrandit la théorie des locales.

Essentiellement en remplaçant les ensembles ordonnés (de points et d'ouverts) par des catégories.

La catégories de locales se plonge dans celle des topos

$$\begin{array}{rcl} Locales = TDC^{op} & \subset & Topos = Logos^{op} \\ O(X) & \longmapsto & Sh(X) \end{array}$$

où

$$Sh(X) = [O(X)^{op}, Ens]^{rec}\,.$$

est formé des foncteurs qui préservent les collages de recouvrements (= les colimites qui n'ont pas besoin d'être changées).

Locales & Topos

On rappelle le produit tensoriel de catégories présentables

$$A \otimes B = Pr(A \times B) /\!\!/ (\operatorname{colim} a_i) \otimes b = \operatorname{colim}(a_i \otimes b), \dots$$

La dernière fois j'ai oublié de dire que l'unité pour ce produit tensoriel était *Ens*

$$Ens \otimes A = A.$$

Je ne vous ai pas donné non plus la formule simple pour le calculer

$$A \otimes B = [A^{op}, B]^c = [B^{op}, A]^c .$$

Locales & Topos

Un ensemble ordonné complet est un cas particulier catégorie présentables.

En particulier $\underline{2} = \{0 \to 1\}$ est une catégorie présentable.

On peut calculer que

$$Sh(X) \otimes \underline{2} = O(X).$$

Locales & Topos

La formule $E \otimes \underline{2}$ fait sens pour tout logos E.

Elle produit toujours un TDC qui s'identifie au TDC des objets sous-terminaux de E

$$E \otimes \underline{2} = Sub(1) = \text{Ouverts de } E.$$

Le foncteur induit

$$- \otimes \underline{2} : Topos \to Locales$$

est adjoint à gauche de l'inclusion

$$\begin{array}{ccc} Locales = TDC^{op} & \subset & Topos = Logos^{op} \\ O(X) & \longmapsto & Sh(X) = [O(X)^{op}, Ens]^{rec} \end{array}$$

$- \otimes \underline{2}$ est le foncteur de réflexion localique.

Locales & Topos

Le foncteur suivant préserve les colimites & les produits (mais pas les limites finies)

$$\begin{array}{rcl} \pi_{-1} : Ens & \longrightarrow & \underline{2} = \{0 \to 1\} \\ \varnothing & \longmapsto & 0 \\ E \neq \varnothing & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Il faut penser à la formule précédente comme un changement de base

$$Sh(X) \otimes \underline{2} = O(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{Z}[x] \otimes \mathbb{Z}_{/2} = \mathbb{Z}_{/2}[x]$$

Locales & Topos

L'analogie suivante à un certain sens et donne une idée de ce qu'on gagne à faire des topos.

Topologie localique	*Topologie topossique*
$\underline{2} = \{0,1\} \leftrightarrow \mathbb{Z}_{/2}$	$\mathit{Ens} \leftrightarrow \mathbb{Z}$
Géom. alg. à coeff. dans $\mathbb{Z}/2$	Géom. alg. à coeff. dans $\mathbb{Z}$
Étude des solutions d'équations à coefficients dans $\{0,1\}$	Étude des solutions d'équations à coefficients dans $\mathbb{Z}$

Locales & Topos

Le produit tensoriel de catégorie présentable permet de définir, les faisceaux à valeurs dans une catégorie présentable A par

$$Sh(X, A) = Sh(X) \otimes A = [Sh(X)^{op}, A]^c .$$

Il faut penser cette opération comme le tenseur d'une $\mathbb{Z}$-algèbre par un $\mathbb{Z}$-module

$$\mathbb{Z}[x] \otimes M = M[x].$$

En particulier, les groupes abéliens et catégories internes à $Sh(X)$ peuvent se définir par

$$Sh(X, Ab) = Sh(X) \otimes Ab,$$

$$Sh(X, Cat) = Sh(X) \otimes Cat.$$

IV — TOPOS SUPÉRIEURS

Locales & Topos

Les idées précédentes de changements de base permette un accès assez facile aux topos supérieurs.

On note $\mathcal{S}$ l'∞-catégorie des ∞-groupoïdes (ou types d'homotopies).

Le foncteur π_0 commute aux colimites et aux produits (mais pas aux limites finies)

$$\begin{array}{rcl} \pi_0 : \mathcal{S} & \longrightarrow & Ens \\ X & \longmapsto & \pi_0(X) \end{array}$$

On va pouvoir faire un changement de base par rapport à ce foncteur.

Locales & Topos

L'adjonction naturelle des topos et des ∞-topos va suivre les mêmes formules que l'adjonction des locales et des topos.

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Topos}_\infty & \rightleftarrows & \mathit{Topos} \\ Sh_\infty(X) & \mapsto & Sh_\infty(X) \otimes \mathit{Ens} \\ Sh_\infty(X) = [Sh(X)^{op}, \mathcal{S}]^{req} & \leftarrow\!\shortmid & Sh(X) \end{array}$$

où $[Sh(X)^{op}, \mathcal{S}]^{req}$ est formé des foncteurs qui préservent les sommes et les quotients de relations d'équivalences ($=$ les colimites qui n'ont pas besoin d'être dérivées).

Locales & Topos

On peut prolonger la table de l'analogie des topologies générales.

Top. localique	*Top. topossique*	*Top. ∞-topossique*
$\underline{2} = \{0, 1\} \leftrightarrow \mathbb{Z}_{/2}$	$\mathit{Ens} \leftrightarrow \mathbb{Z}$	$\mathcal{S} \leftrightarrow \mathbb{Z}[s]$
Étude sol. éqt à coeff. dans $\{0, 1\}$	Étude sol. éqt à coeff. dans $\mathbb{Z}$	Étude sol. éqt à coeff. dans $\mathbb{Z}[s]$

Pour avoir une analogie un peu plus précise, on peut penser à $\mathbb{Z}_{/2}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}[s]$ comme les anneaux où vivent naturellement les caractéristiques d'Euler des espaces correspondant (quand elles sont définies).

Catégories supérieures

Avant de donner la définition des topos supérieurs, on va rappeler pourquoi on a besoin des catégories supérieures.

Une catégorie supérieure est une notion dont il est assez facile de se faire une intuition (flèches entre flèches...), mais dont la formalisation reste problématique.

Dans l'état des choses, on a beaucoup de méthodes pour travailler sur les catégories supérieures dont toutes les flèches supérieures sont inversibles — dites $(\infty, 1)$-catégories.

Les catégories supérieures plus générales ne sont pas encore bien apprivoisées.

On va se limiter à la considération de $(\infty, 1)$-catégories.

Catégories supérieures

Pourquoi a-t-on besoin de la théorie des catégories supérieures ?

Deux raisons :

- Les ensembles souffrent d'un défaut : ils ne permettent pas se classifier eux-mêmes.
- Les définitions de certaines notions deviennent plus simples dans le contexte des catégories supérieures (notamment la définition de topos).

Catégories supérieures — Le défaut des ensembles

La notion d'ensemble est un outil de collectivisation, elle sert à dire

"il y a un *ensemble* de ces trucs là".

Le discours interne à un ensemble est très réduit : étant donné deux éléments, on ne peut dire que $a = b$ ou $a \neq b$. On peut dire qu'un ensemble collectivise des trucs à égalité près.

Or, il y a des situations, où l'on veut classifier les objets à isomorphisme près, et non à égalité près. C'est le cas des ensembles eux-mêmes et de toutes les structures à la Bourbaki (groupes, espaces topologiques...)

Cela se fonde sur l'idée intuitive que deux objets isomorphes doivent avoir exactement les mêmes propriétés.

Cette idée simple met en crise la notion d'ensemble.

Catégories supérieures — Le défaut des ensembles

Cette idée que deux ensembles en bijection doivent avoir exactement les mêmes propriétés amène à considérer les ensembles non pas comme formant un ensemble, mais une catégorie.

Les catégories doivent être pensées, à l'instar des ensembles, comme des outils de collectivisation capable de répondre à plus de situations de collectivisation.

Elles permettent de collectiviser des objets à isomorphisme près, c'est-à-dire qu'elles rendent possible la pluralité des identifications entre deux objets.

Catégories supérieures — Le défaut des catégories

La notion de catégorie souffre le même défaut que celle des ensembles, si on les collectivise, il faut la notion de 2-catégorie.

La seule notion stable est la notion — un peu mystérieuse et peut-être multiple, comme toutes les notions limites — d'∞-catégorie.

C'est la seule la notion répondant à l'intuition de collectivisation qui soit auto-classifiante.

Catégories supérieures — Simplifications

Au-delà des considérations de collectivisation, la théorie des catégories supérieures se justifie, parce qu'elle simplifie un certain nombre de choses :

Elle absorbe naturellement tous les phénomènes homotopiques et homologiques, c'est-à-dire le formalisme des "foncteurs dérivées".

À l'intérieur du paradigme des catégories supérieures, il n'est plus nécessaire de dériver aucun foncteur, les constructions sont directement les bonnes.

En logique, ce point de vue "homotopique" est relié aux questions de réécriture.

Catégories supérieures — Simplifications

Deux types fondamentaux de catégories supérieures s'imposent.

- La notion de catégorie stable s'impose dans l'étude des phénomènes de nature homologique.
  Elle se définit plus simplement que celle de catégorie triangulée ou de dérivateur et permet plus facilement de faire de l'algèbre homologique.
- La notion d'∞-topos s'impose dans l'étude des phénomènes de nature homotopique.
  Elle se définit plus simplement que celle de topos et possède des propriétés plus sympa.

Topos supérieurs

Afin de définir la notion de topos supérieur on a besoin de quelques préliminaires

1. sur la notion d' ∞-catégorie présentable
2. sur la notion de descente
3. sur la notion de colimite homotopique

Une catégorie A est présentable si elle une localisation cocontinue d'une catégorie de préfaisceaux $Pr(C) = [C^{op}, Ens]$.

Pour définir la notion correspondante dans les ∞-catégories, on remplace Ens par l'∞-catégorie $\mathcal{S}$ des types d'homotopie.

Une ∞-catégorie A est présentable si elle une localisation cocontinue d'une catégorie $Pr(C, \mathcal{S}) = [C^{op}, \mathcal{S}]$.

La structure des ∞-catégories présentables est la même que celle des catégories présentables. On a un produit tensoriel construit de la même manière dont $\mathcal{S}$ est l'unité.

Topos supérieurs — Descente

Soit C une ∞-catégorie ayant toutes les limites et colimites.

On a un foncteur canonique

$$\begin{aligned} \mathbb{U} : C^{op} &\longrightarrow CAT_\infty \\ x &\longmapsto C_{/x} \\ u : x \to y &\longmapsto u^* : C_{/y} \to C_{/x}. \end{aligned}$$

La catégorie des éléments de ce foncteur est la fibration universelle de C

$$\begin{tikzcd} (C^{\to})^{op} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & CAT_\infty^\bullet \arrow[d] \\ C^{op} \arrow[r, "\mathbb{U}"] & CAT_\infty \end{tikzcd}$$

On dit qu'une catégorie C vérifie la descente si le foncteur $\mathbb{U}$ envoit les colimites de C dans des limites dans Cat.

Autrement dit, si, pour un diagramme $X : I \to C$, on a

$$C_{/\operatorname{colim} X_i} = \lim C_{/X_i}.$$

Topos supérieurs — Descente

La catégorie $\lim C_{/X_i}$ se calcule comme la catégorie des diagrammes cartésiens au-dessus de X

$$\lim C_{/X_i} = (C^I_{cart})_{/X}$$

où C^I_{cart} est la catégorie des I-diagrammes et morphismes cartésiens.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "cart"'] \\ X \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner" very near start] & Y_j \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & X_j \end{tikzcd}$$

Topos supérieurs — Descente

Pour tout diagramme $X : I \to C$, on a toujours une adjonction $\operatorname{colim}_I \dashv cst_I$

$$C_{/\operatorname{colim} X_i} \underset{cst_I}{\overset{\operatorname{colim}_I}{\leftrightarrows}} (C^I_{cart})_{/X}.$$

où

$$cst_I(Y \to \operatorname{colim} X)_i = Y_i$$

est défini par

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\ X_i \arrow[r] & \operatorname{colim} X_i. \end{tikzcd}$$

Topos supérieurs — Descente

$$\mathcal{C}_{/\operatorname{colim} X_i} \underset{cst_I}{\overset{\operatorname{colim}_I}{\rightleftarrows}} (\mathcal{C}^I_{cart})_{/X}.$$

1. On dit que les colimites de I-diagrammes sont universelles si, pour tout X, le foncteur cst_I est pleinement fidèle (c'est-à-dire si le foncteur colim_I est une localisation).
   Cela signifie que, pour tout $Y \to \operatorname{colim} X_i$, on a
   $$Y = \operatorname{colim}_I (Y \times_{\operatorname{colim} X_i} X_i).$$
2. On dit que les colimites de I-diagrammes sont effectives si, pour tout X, le foncteur colim_I est pleinement fidèle.
   Cela signifie que, pour tout $E_i \to X_i$, on a
   $$E_i = (\operatorname{colim}_I E_i) \times_{\operatorname{colim} X_i} X_i.$$

Topos supérieurs — Définition

Une catégorie C vérifie la descente ssi toutes les colimites sont effectives et universelles.

Dans un logos, seules les unions et relations d'équivalences sont effectives.

Un ∞-logos est une ∞-catégorie présentable qui vérifie la descente.

Un morphisme d'∞-logos est un foncteur préservant les limites finies et toutes les colimites.

On définit les ∞-topos comme les objets de

$$Topos_\infty = Logos_\infty^{op}.$$

Topos supérieurs — Univers

On peut prouver que la seule catégorie ordinaire qui vérifie la descente est la catégorie triviale à un objet $\{0\}$.

En particulier, un logos n'est pas un ∞-logos s'il n'est pas trivial.

Les relations entre logos et ∞-logos sont données par l'adjonction de changement de base

$$\begin{array}{rcl} - \otimes Ens : Logos_\infty & \longrightarrow & Logos \\ Sh_\infty(X) & \mapsto & Sh_\infty(X) \otimes Ens \\ Sh_\infty(X) = [Sh(X)^{op}, \mathcal{S}]^{req} & \leftarrow\!\shortmid & Sh(X) \end{array}$$

Plaçons-nous dans les ensembles.

L'idée pour construire une colimite homotopique est très simple.

1. Cette limite ne sera pas un ensemble, mais un ensemble simplicial qu'on regardera à homotopie près.
2. La construction de cet ensemble simplicial procède ainsi :
    - pour chaque identification entre deux éléments, on met un intervalle entre eux,
    - pour chaque identification entre trois éléments, on met un triangle entre eux,
    - pour chaque identification entre $n+1$ éléments, on met un n-simplexe entre eux.

La colimite classique se retrouve en prenant l'ensemble des composantes connexes de la colimite homotopique.

Plus formellement, la colimite homotopique d'un diagramme

$$I \to Ens$$

est simplement le nerf de ce diagramme (nerf de la catégorie des éléments).

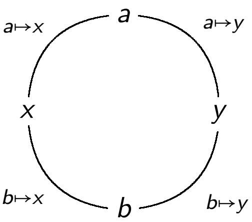
En particulier, le nerf du diagramme constant de valeur $\{*\}$ est simplement le nerf $|I|$ de la catégorie I.

Topos supérieurs — Colimites homotopiques

On considère le pushout

$$\{x\} \longleftarrow \{a, b\} \longrightarrow \{y\}$$

dont la colimite classique est un point.
Sa colimite homotopique a 4 sommets (indexés par les 4 éléments) et 4 arêtes (indexées par les 4 flèches entre éléments)



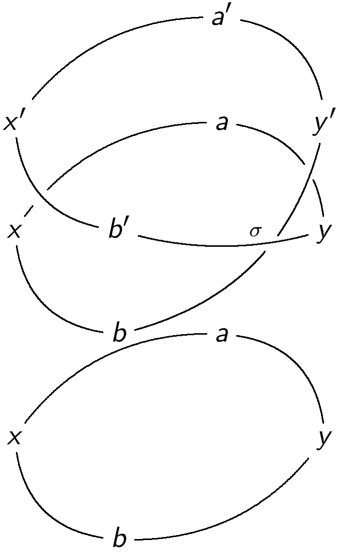
C'est un cercle. Comme il est connexe, on retrouve bien que le quotient classique est un point.

Topos supérieurs — Colimites homotopiques

On considère maintenant un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\{x,x'\} \arrow[d] & \{a,a'\}\coprod\{b,b'\} \arrow[l, "(id{,}id)"'] \arrow[r, "(id{,}\sigma)"] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \{y,y'\} \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\{x\} & \{a,b\} \arrow[l] \arrow[r] & \{y\} & X
\end{tikzcd}$$

La colimite du bas est donc un cercle. Celle d'en haut donne aussi un cercle, mais, à cause de la permutation σ, formant un revêtement de degré 2 du cercle du bas.



$$\begin{tikzcd}
\operatorname{colim} Y \arrow[d] \\
\operatorname{colim} X
\end{tikzcd}$$

On a un morphisme canonique $\{x\} \to \operatorname{colim} X$.

L'effectivité des colimites nous dit qu'on doit avoir

$$\{x\} \times_{\operatorname{colim} X} \operatorname{colim} Y = \{x, x'\}.$$

C'est-à-dire que la fibre de $\operatorname{colim} Y \to \operatorname{colim} X$ en x est $\{x, x'\}$. On constate que c'est bien le cas.

En comparant avec la colimite classique, cela illustre que *Ens* ne vérifie pas l'effectivité des pushouts.

L'effectivité des colimites peut se comprendre en disant que les fibres d'un morphisme entre colimites doivent être les mêmes que les fibres des morphismes entre les objets des diagrammes correspondants.

Topos supérieurs — Stabilisation

On peut considérer d'autres changements de base.

La stabilisation d'une catégorie présentable A est définie par

$$A \otimes Sp = [A^{op}, Sp]$$

où Sp est la catégorie des spectres (au sens de la topologie algébrique).

La stabilisation d'un ∞-logos est la catégorie des faisceaux en spectres

$$Sh(X, Sp) = Sh(X) \otimes Sp = [Sh(X)^{op}, Sp]$$

C'est le support de la dualité de Verdier.

Topos supérieurs — Univers

Dans une catégorie présentable A un foncteur continu $A^{op} \to \mathcal{S}$ est toujours représentable.

Appelons une (grosse) catégorie interne dans une catégorie présentable A tout foncteur continu $A^{op} \to CAT$.

Abstraction faite des problèmes de taille, la condition de descente dit qu'une catégorie présentable est un ∞-logos si la fibration universelle est une catégorie interne. On retrouve la caractérisation des topos comme catégorie présentable ayant un univers.

Topos supérieurs — Exemples

- ∞-logos initial (libre sur 0 générateurs) $\mathcal{S}$
- ∞-logos libre sur 1 générateur (classifiant des objets)

$$\mathcal{S}[x] = [\mathcal{F}in, \mathcal{S}]$$

- ∞-logos libre sur une catégorie C (classifiant les C-diagrammes) :

$$\mathcal{S}[C] = Pr(C^{lex}, \mathcal{S})$$

- ∞-logos classifiant les objets pointés:

$$\mathcal{S}[X^\bullet] = \mathcal{S}[X]_{/X} = [\mathcal{F}in^\bullet, \mathcal{S}]$$

Topos supérieurs — Exemples

- ∞-logos classifiant les sous-objets :

$$\mathcal{S}[X] /\!\!/ \Delta X$$

$(\Delta X = X \to X \times X)$

- ∞-logos classifiant les objets discrets (0-tronqués) :

$$\mathcal{S}[X] /\!\!/ \Delta^2 X$$

$(\Delta^2 X = X \to X^{S^1})$

- ∞-logos classifiant les objets n-tronqués :

$$\mathcal{S}[X] /\!\!/ \Delta^{n+1} X$$

$(\Delta^{n+1} X = X \to X^{S^n})$

Topos supérieurs — Exemples

- ∞-logos classifiant les objets non-vides :

$$\mathcal{S}[X]/\!\!/ im(X \to 1) = [\mathcal{F}in_{\circ}, \mathcal{S}]$$

- ∞-logos classifiant les objets connexes :

$$\mathcal{S}[X]/\!\!/ im(\Delta X) \coprod im(X \to 1)$$

- ∞-logos classifiant les objets connexes pointés :

$$\mathcal{S}[X^{\bullet}]/\!\!/ im(\Delta X^{\bullet})$$

  C'est le topos classifiant les groupes.

- ∞-logos classifiant les objets n-connexes pointés :

$$\mathcal{S}[X^{\bullet}]/\!\!/ \forall k \leq n, im(\Delta^{k+1} X^{\bullet})$$

  C'est le topos classifiant les E_n-groupes.

Appelons une famille d'objets pointés X_i additive si les flèches canoniques $X_i \vee X_j \to X_i \times X_j$ sont des isomorphismes (autrement dit si les sommes et les produits de ces objets coïncident).

Appelons un objet pointé X stablement additif si la famille de ses espaces de lacets $\Omega^n X$ est additive

Le classifiant des objets stablement additifs est

$$S[X^\bullet] /\!\!/ \forall m, n,\ \Omega^m X \vee \Omega^n X \to \Omega^m X \times \Omega^n X.$$

Théorème (A.-Biedermann-Finster-Joyal) C'est une présentation du fameux topos des spectres paramétrés.

Merci !