

Les topos en analogie avec les anneaux commutatifs

— 1 —

Mathieu Anel

—
10 janvier 2018

Workshop *Logique catégorique, topos et dualité*

Université de Nice

Dans le premier exposé, on a établi un double vocabulaire :

- **Logos** = catégorie de fonctions continues à valeurs dans l'espace *Ens* des ensembles.
- **Topos** = espace dont la structure est complètement capturé par son logos.

Dans cet exposé, on va se concentrer sur la face algébrique de la théorie des topos, c'est-à-dire la **théorie des logos**.

Et on va donner des définitions :)

Le but de l'exposé est de construire un parallèle entre la théorie des logos et celle des anneaux commutatifs.

Le premier tableau de comparaison qu'il faut avoir en tête est le suivant

Anneaux commutatifs	Treillis (Frames)	Logos
Schémas affines	Locales	Topos

PLAN

- I. Topos & Logos
- II. Quotients & localisations

I — TOPOS & LOGOS

Logos

Il existe plusieurs définitions classiques des **logos**.

- ▶ axiomes de Giraud
- ▶ axiomes de descente de Rezk
- ▶ localisations exacte à gauche de catégories de préfaisceaux
- ▶ faisceaux sur un site
- ▶ axiomes de Lawvere (cat. LCC avec classifiant des monomorphismes)
- ▶ ...

On va se concentrer sur celle de Giraud, car c'est elle qui rend le plus visible l'analogie avec des anneaux.

Logos

Un **logos** est

1. une **catégorie présentable** (en part. avec $\lim$ finies et colim)
2. avec des **colimites universelles** (cat. LCC)

$$\operatorname{colim}(X_i \times_X Y) \simeq (\operatorname{colim} X_i) \times_X Y,$$

3. des **sommes disjointes**

$$X_i \times_{\coprod X_i} X_j = \emptyset,$$

4. et des **relations d'équivalences effectives**

$$X \times_{X/R} X = R.$$

Pour simplifier, on appellera les conditions 3 et 4 sous le nom de "propriété d'effectivité".

Logos — Effectivité des quotients

La propriété d'effectivité des quotients

$$X \times_{X/R} X = R$$

signifie qu'on peut reconstituer la relation d'équivalence $R \rightrightarrows X$ à l'aide de l'application quotient $X \rightarrow X/R$

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X/R \end{array}$$

Logos — Exemples

- ▶ Ens est un logos
- ▶ si E est un logos et X un objet de E , E/X est un logos
- ▶ si E est un logos et C une petite catégorie, $[C, E]$ est un logos
- ▶ en part. si G est un groupe, les actions de G forment un topos E^G
- ▶ toute localisation exacte à gauche d'un logos est un logos (p.ex. cat de faisceaux $Sh(X)$)
- ▶ avec ces deux derniers exemples, on retrouve les faisceaux équivariants ($Sh(\mathbb{R}/\mathbb{Z}^2) = Sh(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^2}$)
- ▶ ...

Logos — Morphismes

Un **morphisme de logos** (ou un **morphisme algébrique de topos**)

$$f^* : E \longrightarrow F$$

est un foncteur commutant aux limites finies et aux colimites (foncteur cc lex).

Un tel foncteur a automatiquement un adjoint à droite f_* mais on ne va pas s'en servir.

On note *Logos* la catégorie des logos.

Logos — Topos

Comme avec les Treillis et les locales, on définit la catégorie des topos par dualité

$$\mathbf{Topos} = \mathbf{Logos}^{op}.$$

Les objets de $\mathbf{Logos}^{op}$ sont appelés les **topos**.

Les morphismes dans $\mathbf{Logos}^{op}$ sont appelés **morphismes de topos** (ou **morphismes géométriques de topos**).

Logos — Comparaison avec les anneaux

Anneaux	Treillis DC	Logos
somme $+$	union $\cup$	colimites
0	$\perp$	$\emptyset$
produit $\times$	intersection $\cap$	limites finies
1	$\top$	1
distributivité	distributivité	univ. colimites + effectivité
mor. d'anneaux	fct pres. $\cup$ et $\cap$	foncteur cc lex

Il faut justifier ces choix.

Logos — Sommes = colimites

On a fait le choix de toutes les colimites pour remplacer les sommes, il faut le comprendre ainsi.

Dans les anneaux, la somme est une opération dont les arités sont les nombres finis

$$+ : A^n \longrightarrow A.$$

Dans les logos, la colimite est une opération dont les arités sont les petites catégories

$$\operatorname{colim} : E^I \longrightarrow E.$$

En d'autres termes, le rôle des groupes abéliens est joué par les catégories cocomplètes.

(En fait, on se limite à considérer des catégories présentables.)

Logos — Produit = limites

La situation est la même pour les limites finies qui jouent le rôle du produit.

Dans les anneaux, le produit est une opération dont les arités sont les nombres finis

$$\times : A^n \longrightarrow A.$$

Dans les logos, la limite est une opération dont les arités sont les catégories finies

$$\lim : E^I \longrightarrow E.$$

En d'autres termes, le rôle des monoïdes abéliens est joué par les catégories lex (ayant toutes les limites finies).

Logos — Distributivité

L'analogie entre la propriété de distributivité et celle d'universalité des colimites est claire,

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(\operatorname{colim} X_i) \times_Z Y = \operatorname{colim}(X_i \times_Z Y)$$

mais la propriété d'effectivité est plus mystérieuse.

Il faut aussi la penser aussi comme une forme de distributivité.

La chose devient plus claire avec la notion de topos supérieur.

On en parlera dans le troisième exposé.

Logos

On peut compléter notre tableau de comparaison.

Anneaux morphisme d'anneaux	Logos foncteur cc lex
Groupes abéliens morphisme	Catégories présentables foncteur cocontinu (cc)
Monoïdes commutatifs morphisme	Catégories lex foncteur lex
Ensembles applications	Catégories foncteur

Catégories présentables

L'analogue des groupes abéliens est la notion de catégorie présentable avec les foncteurs cocontinus comme morphismes.

Une catégorie présentable A peut se définir comme est une localisation d'une catégorie de préfaisceaux

$$L : Pr(C) \longrightarrow L(Pr(C), W) = A$$

telle que L soit un foncteur cocontinu.

Il faut comparer cela avec le fait que tout groupe abélien A est quotient d'un groupe abélien libre

$$\mathbb{Z}.E \longrightarrow A.$$

On a des adjonctions

$$\begin{array}{ccc} \text{Ens} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{mon. libre}} \\ \xleftarrow{\text{oubli}} \end{array} & \text{Ab} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{Cat} & & \\ \downarrow & \searrow \text{Pr}(-) & \\ \text{CAT} & \xleftarrow{\text{oubli}} & \text{Ab} \end{array} \end{array}$$

Catégories présentables

La catégorie des groupes abéliens est additive :

- ▶ les hom sont des groupes abéliens
- ▶ les produits et sommes coïncident.

C'est la même chose dans les catégories présentables

$$[Pr(C), Pr(D)]_{cc} = [C \times D^{op}, Ens] = Pr(C^{op} \times D)$$

le Hom entre deux catégories présentables est une catégorie présentable.

Sommes/produits :

$$Pr(C) \oplus Pr(D) = Pr(C) \times Pr(D) = Pr(C \amalg D)$$

Les inclusions/projections $Pr(C) \longrightarrow Pr(C \amalg D) \rightarrow Pr(C)$ sont données par $C \rightarrow C \amalg D$ et $D \amalg C \rightarrow \{1\} \amalg C \subset Pr(C)$.

Catégories présentables

Mais surtout, on a un **produit tensoriel** de groupes abéliens.
Il est défini par une propriété universelle :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\text{bilinéaire}} & C \\ & \searrow \text{bilinéaire univ.} & \nearrow \text{!} \\ & A \otimes B & \end{array}$$

linéaire

On a toujours

$$\text{Hom}(A \otimes B, C) = \text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C))$$

et

$$\mathbb{Z}.E \otimes \mathbb{Z}.F = \mathbb{Z}.(E \times F).$$

En général $A \otimes B$ est construit ainsi

$$\mathbb{Z}(A \times B) // ((a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b, \dots).$$

Catégories présentables

On a aussi un **produit tensoriel** de catégories présentables

Il est aussi défini par une propriété universelle :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\text{bicocontinu}} & C \\ & \searrow \text{bicocontinu univ.} & \nearrow \text{cocontinu} \\ & A \otimes B & \end{array} \quad \exists!$$

On a toujours

$$[A \otimes B, C]_{cc} = [A, [B, C]_{cc}]_{cc}$$

et

$$Pr(C) \otimes Pr(D) = Pr(C \times D)$$

En général $A \otimes B$ est construit ainsi

$$Pr(A \times B) // ((\text{colim } a_i) \otimes b = \text{colim}(a_i \otimes b), \dots).$$

(j'oublie les problèmes de tailles).

Logos

Revenons au tableau de comparaison

Anneaux morphisme d'anneaux	Logos foncteur cc lex
Groupes abéliens morphisme	Catégories présentables foncteur cocontinu (cc)
Monoïdes commutatifs morphisme	Catégories lex foncteur lex
Ensembles applications	Catégories foncteur

Logos

Le tableau précédent va de pair avec des foncteurs d'oubli de structure

$$\begin{array}{ccc} Ann & \longrightarrow & Ab \\ \downarrow & & \downarrow \\ Mon & \longrightarrow & Ens \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Logos & \longrightarrow & Pres \\ \downarrow & & \downarrow \\ CAT^{lex} & \longrightarrow & CAT \end{array}$$

où CAT est la catégorie des (grosses) catégories.

Logos libre

Théorème (Bunge + ?) Les foncteurs d'oubli précédents ont des adjoints à gauche partiels (définis pour les petites catégories seulement).

$$\begin{array}{ccc} \text{Ann} & \xleftarrow{\text{Sym}(-)} & \text{Ab} \\ \mathbb{Z}(-) \uparrow & \nwarrow \mathbb{Z}[-] & \uparrow \mathbb{Z}(-) \\ \text{Mon} & \xleftarrow{\text{mon. libre}} & \text{Ens} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Logos} & \xleftarrow{\text{Sym}(-)} & \text{Pres} \\ \text{Pr}(-) \uparrow & \nwarrow \text{Ens}[-] & \uparrow \text{Pr}(-) \\ \text{Cat}^{\text{lex}} & \xleftarrow{(-)^{\text{lex}}} & \text{Cat} \end{array}$$

où

- ▶ Cat est la catégorie des petites catégories,
- ▶ $\text{Pr}(-)$ est le foncteur des **préfaïceaux**,
- ▶ $\text{Sym}(-)$ est le "**topos symétrique**" (Lawvere, Bunge),
- ▶ et $\text{Ens}[-]$ est le foncteur de **logos libre**.

Logos libre

La commutation du carré précédent donne la construction suivante du topos libre sur une petite catégorie C :

1. compléter C librement pour les limites finies en C^{lex}
2. compléter C^{lex} librement pour les colimites en $Pr(C^{lex})$.

Faisons ça pour $C = \{x\}$.

Logos libre à 1 générateur

Le topos libre sur un générateur x est

$$Ens[x] = Pr(Fin^{op}) = [Fin, Ens]$$

où Fin est la catégorie des ensembles finis (Fin^{op} est la complétion libre de $\{x\}$ pour les limites finies).

Les objets de $Ens[x]$ s'écrivent formellement

$$\operatorname{colim}_j \lim_i x = \operatorname{colim}_j x^{K_j}$$

comme des sorte de polynômes.

Il faut comparer cela avec la construction de l'anneau libre sur 1 générateur x :

1. prendre le monoïde commutatif libre $M(x) = \mathbb{N}$ sur x
2. prendre le groupe abélien libre $\mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}.M(x)$ sur $M(x)$.

Les éléments de $\mathbb{Z}[x]$ s'écrivent formellement

$$\sum x^n$$

ce sont des polynômes.

Logos libre

Vérifions la propriété du logos libre.

Soit E un logos, on a des équivalences entre

$$Pr(C^{lex}) \longrightarrow E \quad \text{foncteur cc lex}$$

$$C^{lex} \longrightarrow E \quad \text{foncteur lex}$$

$$C \longrightarrow E \quad \text{foncteur.}$$

La première étape est vraie car l'extension de Kan à gauche

- depuis une catégorie lex
- à valeurs dans une catégorie où les colim sont universelles

préserve les limites finies

Logos enveloppants

Dans le langage de l'Éléphant (Johnstone), Cat^{lex} est la catégorie des **théories cartésiennes**.

Pour une telle théorie, le logos $Pr(\mathbb{T})$ est son logos enveloppant.

On peut aussi considérer la catégorie $Cat^{\times}$ des **théories de Lawvere**.
On a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} Cat^{lex} & \xleftarrow{(-)^{lex}} & Cat. \\ & \nwarrow (-)^{lex/\times} \quad \searrow (-)^{\times} & \\ & Cat^{\times} & \end{array}$$

Le logos $Pr(\mathbb{L}^{lex/\times})$ est le logos enveloppant de la théorie de Lawvere $\mathbb{L}$.

Logos = Anneaux

Cette analogie pose des questions évidentes

1. Quels sont les analogues des notions de quotient, d'idéaux ?
2. Quels sont les analogues des localisations d'anneaux ?
3. Quels sont les analogues des modules ?
4. Quels sont les analogues du calcul différentiel ? de la théorie de la mesure ?
5. Y a-t-il un analogue des schémas non-affines ?...

Ces questions n'ont pas encore toute de réponse précise ou définitive, c'est une part de mon programme de recherche que d'y répondre.

Logos = Anneaux

Quelques éléments de réponse

1. quotient = localisation exacte à gauche
2. localisations d'anneaux $\rightarrow$ ouverts & étales de topos
3. calcul différentiel sont liés au calcul de Goodwillie
4. théorie de la mesure est liée à la dualité de Verdier
5. schémas non-affines = champs

Logos = Anneaux

Pour le reste de l'exposé, on va se concentrer sur une seule de ces questions : la notion de quotient.

C'est important car ce qui va permettre de construire tout les topos.

De même que

- ▶ tout anneau A est un quotient d'un anneau libre $\mathbb{Z}[E]$,
- ▶ tout logos $\mathcal{E}$ est un quotient d'un logos libre $\mathcal{S}[C]$.

II — QUOTIENTS

Quotients de logos

On sait construire les logos libres, on pourra savoir décrire tous les logos si on sait construire tous les quotients.

La notion de **quotient** qui s'impose dans la manipulation des topos est celle de **localisation exacte à gauche**.

Plus généralement, il faut penser la notion de localisation de catégorie comme un quotient : on force des objets à devenir égaux.

(Le choix du terme "localisation" a été malheureux, il cache la véritable nature de cette opération.)

Localisations de catégories

La théorie des localisations de catégories générales est assez complexe (il faut des structures d'intervalle, de fractions ou de modèles pour arriver à décrire la catégorie localisée).

Mais la situation se simplifie si les catégories sont supposée présentable.

Dans ce contexte, il y a le truc génial que le foncteur de localisation $C \rightarrow L(C, W)$ admet toujours un adjoint à gauche pleinement fidèle.

On peut donc **décrire la localisation comme une sous-catégorie** de C !

Pour cela il faut rappeler les notions d'**orthogonalité** et de **système de factorisation** dans une catégorie.

Orthogonalité

Deux flèches $u : A \rightarrow B$ et $f : X \rightarrow Y$ sont dites **orthogonales** (on note $u \perp f$) si tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ u \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admet un relèvement unique.

Si C est une catégorie, on note $C^{\rightarrow}$ sa catégorie des flèches.

Deux sous-catégories $L \subset C$ et $R \subset C$ sont dites **orthogonales** (on note $L \perp R$) si

$$\forall u \in L, \quad \forall f \in R, \quad u \perp f.$$

Orthogonalité et localisation cc

Soit C une **catégorie présentable** et $L : C \rightarrow L_{cc}(C, W)$ une localisation cocontinue, alors L admet un adjoint à droite ι pleinement fidèle.

On dit qu'un objet X de C est **local** si

$$W \perp (X \rightarrow 1).$$

On abrège $W \perp X$ et on note $Loc(W)$ la catégorie des objets locaux.

Pour tout objet X , l'objet ιLX est local et l'unité $X \rightarrow \iota LX$ est la réflexion de X dans la sous-catégorie des objets locaux.

Théorème $Loc(W) \simeq L_{cc}(C, W)$.

Localisation de logos

Une **localisation d'un logos** E est un morphisme de logos $E \rightarrow F$ qui est une localisation de catégorie présentables.

Autrement dit, une localisation de logos est une localisation $L : E \rightarrow F$ qui est un foncteur cocontinu et exact à gauche.

On a vu comment calculer des localisations de catégorie présentable

$$L_{cc}(C, W) = \{\text{objets locaux}\}$$

Grande question de la théorie des logos : décrire les localisations exactes à gauche engendrée par une classe de flèches W .

$$L_{cc}^{lex}(E, W) = \{\text{objets ?}\}$$

Localisation de logos

Théorème (A, ABFJ)

1. Si W est stable par **limites finies** dans $E^{\rightarrow}$, alors

$$Loc(W) \simeq L_{cc}^{lex}(E, W).$$

2. Si W est stable par **diagonales et changement de base**, alors

$$Loc(W) \simeq L_{cc}^{lex}(E, W).$$

Rappel : la **diagonale** d'une flèche $f : X \rightarrow Y$ est la flèche $\Delta f : X \rightarrow X \times_Y X$. Les diagonales supérieures sont définies par induction $\Delta^{n+1}f = \Delta(\Delta^n f)$.

Localisation de logos

Supposons que W soit une unique flèche $w : A \rightarrow B$ (on peut toujours s'y ramener).

On définit

$$w' = \coprod \Delta^n w.$$

Un objet X est dit **lex-local** si, pour tout changement de base v de w'

$$v \perp (X \rightarrow 1)$$

On note $LexLoc(w)$ la catégorie des objets lex-locaux.

Corollaire

$$LexLoc(W) = L_{cc}^{lex}(E, W).$$

Topologie de Grothendieck

Une localisation de logos est **topologique** si elle peut être engendrée par un monomorphisme $m : A \rightarrowtail B$.

Théorème Toute localisation de logos est topologique

Preuve Pour inverser $w : X \rightarrow Y$, il suffit d'inverser le monomorphisme

$$\text{image}(w) \coprod \text{image}(\Delta w).$$

Inverser $\text{im}(w)$ force w à devenir un épimorphisme et inverser $\text{im}(\Delta w)$ force w à devenir un monomorphisme. (Ce n'est vrai que parce qu'on considère des localisations exactes à gauche !)

Topologie de Grothendieck

Si w est un monomorphisme, ses diagonales sont des isomorphismes.

Un objet est lex local pour un mono w ssi il est orthogonal à tout ses changements de base

Corollaire

$$L_{cc}^{lex}(E, A \twoheadrightarrow B) = \{X \mid \forall \text{chgt de base } m' \rightarrow m, m' \perp X\}$$

Construction de topos

On peut maintenant construire tous les logos en analogies avec les anneaux.

1. On se donne une catégorie X de générateurs.
2. On construit le logos libre $Ens[X] = Pr(X^{lex})$. Les éléments sont des sortes de polynômes en les objets de x .
3. Une relation est un morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $Ens[X]$. Il faut y penser comme une équation égalisant deux polynômes.
4. Le logos quotient $Ens[x]//(f)$ se construit comme la catégorie des objets lex-locaux pour f .

La donnée (X, f) est une [alternative à la notion de site](#).

Elle a l'avantage de marcher aussi pour les topos/logos supérieurs (au contraire des sites).

On verra ça dans le prochain exposé.

C'est tout pour aujourd'hui.

Merci !