Le vélo à dix dimensions

Mathieu Anel

Résumé

Billets de blogs issus d'une conférence de vulgarisation donnée à Montréal en 2010.

Assez du nombre d'or : vive les espaces de modules ! L'autre jour (il y a longtemps) j'ai mis en ligne un texte écrit dans ma jeunesse où je dénonçais la trop grande importance qu'on donne au nombre d'or. Ça m'a toujours agacé de voir dans les rayons mathématiques des librairies les mêmes histoires : nombre d'or, nombres imaginaires, nombre π...

Ça m'agace pour deux raisons : d'abord il y a franchement des mathématiques bien plus intéressantes à vulgariser (même sur les nombres) et qui servent plus à une bonne compréhension du monde que la masturbation spirituelle sur les propriétés du nombre d'or ou de pi ; et puis, surtout, le traitement donné sur les sujets du genre nombre d'or n'est pas du tout de la vulgarisation des mathématiques, c'est un ramassis de remarques, de photos couleurs, de formules non expliquées le tout avec pour seule cohérence de prétendre parler de quelque chose en l'invoquant à tout bout de champ : nombre d'or, nombre d'or ! Mais je ne vais pas me battre encore contre le nombre d'or ou les couillons qui s'excitent dessus en pensant y voir une Révélation, s'ils connaissaient plus de mathématiques ils trouveraient de meilleures sources d'exaltation.

Par exemple, on trouve aussi des livres parlant des fractales et de la théorie du chaos, deux choses qui ont bercé mon enfance mathématique, et c'est avec nostalgie que je pense au livre de James Gleick (la théorie du chaos) ou au logiciel Fractint. Ceci dit, sur ces sujets, la vulgarisation pourrait être bien meilleure, à commencer par le fait qu'il n'y a pas de théorie du chaos au sens où, par exemple, il y a une théorie des ensembles (mais c'est tout un sujet), ou par le fait que les livres sur les fractales ne vont souvent pas plus loin que montrer des images (on y cherchera longtemps une explication de l'auto-similarité tant mise en avant des figures fractales). Bref, dans ces deux exemples aussi, on tombe malheureusement vite dans de l'incantation plus que dans de l'explication.

Je pense aussi à la jolie collection Quatre à Quatre chez Le Pommier qui propose des cours introductifs en trois niveaux sur des notions qui vont jusqu'à la topologie ou la géométrie analytique. Pour ne les avoir que feuilletés, la qualité semble très bonne (même si, me connaissant, le jour où le tome *Qu'est-ce que les mathématiques ?* me passera sous la main je dirais le contraire) le format sous forme de cours est original mais on y définit des notions plus qu'on les explique. Apparemment on ne peut pas tout avoir.

Tant que je suis à râler, je me permets de regretter qu'on ne parle pas plus de notions avancées de géométrie comme les espaces de plus de trois dimensions, les groupes de Lie, la cohomologie, l'homotopie, les espaces de modules (auxquels je veux arriver) etc. qui sont parmi les grandes idées des deux derniers siècles et qui occupent tous les jours une large part de la communauté mathématique. Mais il est vrai que les coquilles dorées et autres fractales ont l'avantage de fournir de jolies images et que les éditeurs de livres vendent d'abord du papier... comme je l'ai déjà mentionné, on attendrait des universités qu'elles s'investissent dans des publications vulgarisatrices (ou des sites internet puisque ça coûte moins cher) mais c'est très timide.

Parce qu'on me reproche trop de râler, je vais relever le défi de tenter de faire mieux et d'expliquer certaines notions mathématiques avec lesquelles je travaille. Je vais peut-être me casser les dents, mais je suppose que ça sera bien fait pour moi. Je vais donc vulgariser une notion bien plus intéressante et utile que le nombre d'or : les espaces de modules ; ça va prendre un peu de temps alors bon courage.

Les espaces de modules – 1. les dix dimensions d'un vélo Les espaces de modules c'est la manière dont apparaissent naturellement dans le monde mathématiques la plupart des espaces « à n dimensions » dont tout le monde à pu entendre parler. Et du coup je vais expliquer comment on construit plein d'espaces à n dimensions où n est n'importe quel nombre entier, et, paraphrasant Feynman que j'aime bien, je vais même me permettre de dire qu'après m'avoir lu vous aurez mieux compris que certains de mes étudiants ! (et en tout cas que les lecteurs de Wikipédia).

Mais d'abord, je veux dire un mot sur le qualificatif naturellement que j'ai employé. Ce que je veux dire par là c'est que c'est facile de construire des espaces à autant de dimensions qu'on veut (il suffit de croiser des espaces, voir plus bas) mais que c'est un peu artificiel si on n'en fait pas les solutions à certains problèmes. Naturel ça veut dire apparaissant comme la solution à un problème qu'on s'est posé.

Maintenant, quelques mots sur la notion de dimension. Normalement, on a appris que une dimension ça faisait une droite et si on est malin on aura compris que le fait d'aller tout droit n'est pas important et qu'un cercle, ou n'importe quel trait continu, sont aussi des exemples de trucs à une dimension. Ce qui est important c'est que dans une dimension on ne peut aller qu'en avant ou en arrière.

On a aussi appris que deux dimensions ça faisait un plan et si on est malin on aura compris que le fait d'être plat n'est pas important et que n'importe quelle surface est aussi un exemple de truc à deux dimensions. Ce qui est important c'est que dans deux dimensions on peut aller dans n'importe quelle direction mais pas en haut ni en bas.

Et puis on a appris que trois dimensions ça faisait l'espace, comme celui dans lequel on vit, mais là pour piger que l'espace n'est qu'un exemple de truc à trois dimensions et qu'il existe d'autres formes tridimensionnelles qui seraient des généralisations des courbes et des surfaces, il faut être super-mega-malin, ou un peu moins et avoir fait des études de maths avancées (ou avoir un troisième oeil pour voir en 4D). Dans tous les cas, si on peut concevoir formellement de tels espaces, on ne peut pas les voir au sens où on voit une ligne courbe ou une surface, car, de même qu'on voit une ligne courbe lorsqu'elle est dessiné sur un plan, ou une surface lorsqu'elle plongé dans l'espace, pour voir les espaces tridimensionels courbes, il faudrait au moins une quatrième dimension mais nos yeux, pauvres choses terrestres, n'en ont que trois !

L'idée intuitive est que la dimension compte le nombre de degrés de liberté de mouvement d'un système. il y aurait beaucoup à dire sur cette idée (à commencer par le fait qu'il y a plusieurs notions) mais, pour nous, il suffit d'avoir en tête que la dimension d'un espace, c'est le nombre de paramètres qu'il faut fixer pour en décrire un point.

En parlant de point, il y a aussi la dimension zéro : un point tout seul est considéré comme un truc de dimension zéro, ainsi que toutes les collections de points espacés les uns des autres.

Après ça, les mathématiciens ont inventés des trucs à tout nombre de dimensions qu'ils appellent simplement des espaces parce que c'est plus simple d'avoir un seul mot (dans la suite le mot espace est à comprendre en ce sens général et pas à celui restreint de truc à trois dimensions dans lequel on vit). Comme ça fait déjà un bout et qu'ils sont nombreux à étudier ces espaces, les mathématicien ont développé plein de techniques pour pallier la déficience visuelle et se faire une intuition de ce qui s'y passe, mais je ne vais pas en parler dans ce billet.

Il y'a un premier moyen facile de construire des espaces de grande dimension, c'est de croiser des espaces de petite dimension : genre une droite croisée avec une autre droite ça fait un plan, un plan croisé avec une droite ça fait l'espace, et un plan croisé avec un plan, ça fait un espace à quatre dimensions. On peut définir comme ça l'espace plat de dimension n comme le croisement de n droites, la hiérarchie de ces objets prolonge celle de droite, plan et espace. (Les mathématiciens appellent ça des espaces affines, mais il me semble que le terme d'espace plat est plus parlant pour vulgariser). On peut aussi croiser un cercle avec une droite et ça fait un cylindre, ou un cercle avec un cercle et ça fait un tore. Les mathématiciens appellent cette opération de croisement faire le produit de deux espaces (parce qu'il y a une analogie avec le produit des nombres) mais, là encore, le terme croiser me semble plus adapté à la vulgarisation.

Bref, l'idée d'un croisement est que pour décrire un point du croisement de deux espaces, il faut (et suffit) de décrire un point du premier espace et un point du deuxième. La règle pour la dimension est que si on croise un truc de dimension n et un truc de dimension m, le croisement est un truc de dimension $n+m$. Et comme ça on peut monter aussi loin qu'on veut. C'est le moyen le plus simple de construire des espaces de grande dimension mais c'est un peu gratuit.

Le moyen le plus rigolo, c'est de le définir comme un espace de modules et je vais donner mon exemple préféré : le vélo.

On va imaginer un vélo et on va décrire l'ensemble de toutes les positions dans lequel il peut être. Ce que je veux dire par là ça n'est pas sa position dans une pièce ou sur un mur, mais sa position intrinsèque : hauteur de la selle, angle des freins... alors comptons le nombre de paramètres qu'il faut fixer et décrivons les :

1. hauteur de la selle : il y a un intervalle de valeurs possibles (borné par la hauteur de la tige) ;
2. angle de la selle avec le cadre (après tout on peut vouloir la mettre de travers) : les variations de cet angle forment un cercle ;
3. angle du guidon avec le cadre : à cause des câbles de freins il ne peut pas tourner entièrement sur lui-même donc on ses variations forment un arc de cercle seulement ;
4. angle de la poignée du frein avant avec le guidon : il décrit un arc de cercle ;
5. angle de la poignée du frein arrière avec le guidon : il décrit un arc de cercle ;
6. angle de la roue avant avec le guidon (par exemple repéré par la position de valve) : ses variations décrivent un cercle ;
7. angle de la roue arrière avec la cadre : ses variations décrivent un cercle ;
8. l'angle du pédalier avec le cadre (qui est lié au précédent mais on va supposer que le vélo a déraillé pour sauter cet aspect) : il décrit un cercle ;
9. l'angle de la pédale gauche par rapport au pédalier : un cercle ;
10. l'angle de la pédale droite par rapport au pédalier : un cercle encore.

Sans ergoter sur le type de vélo qu'on imagine, disons qu'on a dix paramètres à fixer pour décrire sa position. L'espace des positions du vélo est donc un espace à dix dimensions ! Si on veut être pédant on peut l'appeler l'espace des modules de position du vélo. Pourquoi c'est un espace ? Parce que chacun des paramètres peut varier continuement ; ici, espace est synonyme de continuum.

Il se trouve en fait, que cet espace des positions de mon vélo est un croisement d'espaces à une dimension : chaque rotation qui peut faire un tour complet correspond à un cercle et les autres mouvements de translation ou de rotation incomplète sont paramétrables par des segments ou des arcs de cercles. Si on fait le bilan, on a six cercles, trois arcs de cercle et un intervalle, soit dix objets de une dimension chacun ; je les croise tous et j'obtiens l'espace des positions de mon vélo.

Tous les espaces de modules ne sont pas forcément de tels croisements, mais quand c'est le cas, on est content de dire qu'on a un système de coordonnées globales, c'est-à-dire qu'on a un moyen de décrire n'importe quel position du vélo par une liste de nombres et deux positions sont égales si et seulement si les listes le sont. En général on a pas de telle description mais souvent on a en une localement, c'est-à-dire que pour une position donnée, il est possible de trouver des listes de nombres pour décrire non pas toutes les positions mais seulement celle qui sont voisines. dans ce cas on dit qu'on a des coordonnées locales. Le mathématicien est encore content s'il a des coordonnées locales, il ne tire la gueule que quand il n'est pas possible d'en trouver ; ça veut dire que l'espace a ce qu'il appelle des singularités et c'est compliqué, mais c'est aussi ce qui fait le défi de l'étude.

Pour finir, je peux maintenant risquer une définition que tout le monde devrait comprendre : un espace de modules, c'est l'espace de toutes les positions possibles d'un système et un problème de modules c'est le problème de construire l'espace des modules d'un certain système, c'est-à-dire d'en trouver et décrire tous les degrés de liberté. Ça peut sembler très vague ou abstrait mais c'est avant tout une manière de regarder les choses. Quant au mot module, j'ai oublié de le dire, il veut dire mesure, on aurait tout aussi bien pu appeler ça des espaces de paramètres, mais c'est moins joli.

Les espaces de modules – 2. exemples J'ai terminé mon exemple du vélo par la définition suivante : un espace de modules, c'est l'espace de toutes les positions possibles d'un système. Cette définition est vraiment très générale et on ne va pas très loin avec ça, notamment, pour un système donné, on ne connait a priori même pas la dimension de son espace de modules (qui correspond aux nombre de degré de liberté de ce système). Pour le vélo, il a fallu décrire l'espace des modules de position comme un croisement d'espaces pour pouvoir calculer sa dimension, ce qui correspondait à séparer le vélo en sous-systèmes élémentaires n'ayant qu'un degré de liberté. On dira alors que résoudre un problème de module, c'est trouver une construction de l'espace des modules, par exemple comme croisement, et c'est ce qui va permettre de dire des choses sur cet espace.

Il faut savoir que résoudre un problème de modules, c'est très très dur. À chaque fois, il faut trouver un truc, avoir une idée spécifique et parfois on n'en trouve pas.

Le plus vieil exemple sur lequel on a tous bossé en cours de maths c'est la résolution d'équation : trouver toutes les solutions à une équation donnée. C'est clairement pas le plus excitant, mais c'est bien résoudre un problème de modules ! Par exemple, si je cherche tous les nombres tels que $x^2 - 3x + 2 = 0$, l'école nous a appris qu'il y a deux ou une ou pas de solutions. Pour savoir ça et calculer les solutions, il y a un truc : il faut calculer le soi-disant discriminant. S'il est négatif, il n'y a pas de solution ; s'il est nul, il y en a une seule ; sinon, il y en a deux. Je laisse la page Wikipédia expliquer les détails, ce qui est important pour moi c'est qu'on a trouvé un truc pour trouver l'ensemble des solutions (un ensemble est un espace de dimension zéro).

Autre exemple, si je cherche toutes les paires (x, y) de nombres (vues comme les points d'un plan) qui vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 1$, l'espace des solutions est bien connu pour être un cercle et donc de dimension un. Là encore il y a un truc, il faut utiliser le théorème de Pythagore pour conclure que l'ensemble des solutions est exactement celui des points à distance un de l'origine. (Pour ce qui ne savent pas comment les points d'un plan correspondent à des paires de nombres, ils peuvent tenter de lire l'article wikipédia sur les coordonnées cartésiennes.) L'exemple se généralise en trois variables où l'espace des solutions de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est une sphère, on le montre encore avec Pythagore.

Parfois on arrive à trouver un truc parfois pas. Parfois les trucs se généralisent à des systèmes proches, parfois pas. Par exemple, le gros succès de la théorie de Galois a été de montrer qu'il n'existe pas de truc pour décrire les solutions d'une équation du genre $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ en fonction des coefficients a, b, c, d, e et f comme on le faisait pour les équations de degré inférieur à l'aide des seules opérations de somme, produit et racine (racines carrées, cubiques et autres). Mais, attention, cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de truc pour calculer les solutions : le truc précédent ne voulait utiliser que trois types d'opérations sur les nombres, si on en introduit d'autres (comme les fonctions thêta) on arrive à exprimer toutes les solutions.

Dans le cas des espaces de solutions d'équations, il y a une règle pour calculer la dimension de l'espace : nombre de variables (lettres du genre x et y) moins nombre d'équations. Par exemple, dans le cas du cercle plus haut, j'avais une équation et deux variables, et la dimension du cercle est bien $2 - 1 = 1$. Ça marche aussi pour l'exemple de la sphère où l'on trouve $3 - 1 = 2$. C'est bien joli mais ça ne marche vraiment pas tout le temps, parce que si j'ai trois équations à deux variables, je trouve une dimension négative, ce qui n'a pas de sens. Et je fais une parenthèse pour mentionner que c'est un joli problème de savoir quand est-ce que cette formule est vraie et qu'il sous-tend nombre de mathématiques depuis des siècles (ne me demandez pas depuis quand). On retrouve ce problème en algèbre linéaire (théorème du rang), en géométrie algébrique (dimensions d'intersection), et dans les évolutions les plus récentes, on a inventé des trucs trippants comme les dimensions virtuelles pour expliquer les dimensions négatives et faire que la formule soit toujours vraie ! je reste mystérieux, je dirais juste que c'est un truc qu'on aime beaucoup faire en maths, quand une formule est presque vraie, on se débrouille pour trouver le contexte où elle l'est toujours. C'est la source de nombre de révolutions mathématiques. mais je m'éloigne de mon sujet.

Bon. Si vous êtes comme moi, vous devez vous dire que mes exemples sont décevants, je vous ai vendu les espaces de modules comme un truc super intéressant et moderne et quelque chose me dit que je n'ai pas dû encore convaincre grand monde. Mais je voulais d'abord rattacher la notion à des trucs plus ou moins connus. Voyons maintenant d'autres exemples plus sexy que les solutions d'équations.

Je parlais des fractales en introduction à ces billets, tous les livres sur le sujet mentionnent les ensembles de Julia et de Mandelbrot qui se trouvent être des espaces de modules. Pour le dire vite, on étudie certaines suites de nombres dépendantes (paramétrées par) d'un point du plan. Ces suites peuvent avoir deux comportements : soit les nombres grandissent jusqu'à l'infini, soit leur taille reste limitée. L'ensemble des points du plan paramètres tels que la suite reste de taille limitée forme ce qu'on appelle l'ensemble de Julia de la suite. En d'autres termes l'ensemble de Julia est l'espace des module des suites limitées en taille. Quand à l'ensemble de Mandelbrot, il est aussi construit à partir des point d'un plan : un point fait partie de l'ensemble si l'ensemble de Julia associé est formé d'un seul morceau (comme ici et pas comme ici) et le mathématicien dira que l'ensemble de Julia est connexe. L'ensemble de Mandelbrot est donc l'espace des modules des ensembles de Julia connexes. On trouve ici un dessin qui montre l'ensemble de Mandelbrot et à quoi ressemblent les ensembles de Julia associés. es exemples sont extrêmement difficile à construire ou à décrire et avant de pouvoir les représenter graphiquement à l'aide d'ordinateur, on ne savait pas dire grand chose sur eux (notamment on ne savait pas qu'ils étaient fractals). Une petite propriété en passant : il se trouve que l'ensemble de Mandelbrot est lui-même connexe, cela revient à dire qu'on peut déformer continuement deux ensembles de Julia connexes l'un sur l'autre de manière à ce que tous les ensembles de Julia intermédiaires soient aussi connexes. je vous laisse y méditer.

Un autre bel exemple d'espace de modules est le groupe des mouvements possibles dans notre brave espace physique tel que le décrit Poincaré dans la valeur de la science où il tente d'expliquer qu'il a six dimensions. Son explication n'est pas facile à piger, mais on peut en tenter une en des termes plus modernes, si j'imagine une brique et que je veux la déplacer dans l'espace, je peux distinguer deux types de mouvements : les rotations et les translations. Avant d'aller plus loin, il me faut définir les axes distingués de ma brique : il faut imaginer trois axes qui la transpercent en passant par le milieu des faces opposées. Ces trois axes se coupent exactement au centre de la brique. Maintenant si je veux faire tourner la brique sur elle-même (en laissant fixe son centre), je peux le faire en particulier le long de chacun de ces axes. Je vous laisse vous convaincre qu'en trois rotations successives le long des trois axes, je peux mettre la brique dans n'importe quelle orientation. Autre type de mouvement possible, je peux trimballer la brique à l'autre bout de la pièce en laissant fixe les directions des trois axes, on appelle ça une translation. Je peux décomposer un tel mouvement en trois temps : d'abord je monte ou descend ma brique, puis je la bouge vers la droite ou la gauche, et enfin je la bouge en avant ou en arrière. Si je combine rotations et translations ma brique fera toutes les acrobaties que je veux. Tout mouvement aussi complexe que je veux se décomposera en une combinaison des six mouvements élémentaires, c'est comme ça qu'on peut montrer que l'espace des mouvements dans l'espace est de dimension six.

Tant que j'y suis je glisse que l'ensemble de ces mouvements a une structure particulière : on peut obtenir un nouveau mouvement en en enchaînant un après un autre et on peut faire un mouvement à l'envers. On obtient une structure importante que les mathématiciens appellent groupe. Si je distingue un type particulier de mouvements, par exemple les rotations ou les translations, ils définissent ce qu'on appelle des sous-groupes. Le groupe des mouvements spatiaux est presque le croisement des sous-groupes des rotations et des translations tel que j'ai défini la notion dans le billet précédent, c'est un exemple d'espace fibré.

Encore un autre exemple tiré de la géométrie : les espaces projectifs. Si j'imagine un plan muni d'un point distingué que j'appelle l'origine, je vais considérer l'ensemble des droites du plan passant par cette origine ; l'intuition me dit que ma droite peut varier continuement et l'ensemble de ces droites forme donc un espace. Voici un moyen de construire cet espace :

je vais tracer un cercle centré en mon origine et je remarque que mes droites coupent exactement ce cercle en deux points diamétralement opposés. Inversement si j'ai deux points diamétralement opposés, il passe une seule droite par ces deux points et elle contient l'origine. Mon espace de droites est donc exactement le même que celui des paires de points diamétralement opposés sur un cercle. Mon espace serait construit si je savais associer à une droite exactement un point (c'est le principe de ces espaces de modules : un point de l'espace correspond à une position d'un certain système) et je peux faire ça facilement en ne considérant que la moitié de mon cercle. Mais il faut faire attention que ma moitié de cercle contient encore deux points diamétralement opposés (les deux points du bord) mais on y est presque, il suffit de les "coller ensemble" pour n'en n'avoir plus qu'un ! et ma moitié de cercle redevient un cercle. (Mais cette heureuse coïncidence est ne se généralise pas en dimension supérieure.) C'est ce cercle qu'on appelle la droite projective mais je ne vais pas expliquer pourquoi. Une autre manière de penser ce cercle, moins banale, c'est de revenir au premier cercle qu'on a tracé autour de l'origine et de dire qu'on a identifié deux points diamétralement opposés en un seul point ; il s'agit donc de les recoller ensemble pour n'en avoir qu'un seul. Le truc est un peu bizarre mais on peut se faire une idée en regardant le bord d'un ruban de Möbius : il dessine un cercle qui fait une boucle avant de se refermer et deux points diamétralement opposés sont situés l'un au-dessus de l'autre. Si on fait tendre l'épaisseur du ruban vers zéro on voit comment on fait le recollement dont je parle.

Maintenant, je vais construire le plan projectif comme l'espace des droites de l'espace passant par un point fixé. L'idée est la même, je considère une sphère centrée sur mon origine et chaque droite coupe la sphère en deux points exactement. En copiant ce que je faisais avant, je peux construire mon plan projectif en ne considérant qu'une demi-sphère. Sauf qu'il y a encore un problème sur le cercle de bord car deux point opposés décrivent la même droite. Mais là, si vous me lisez attentivement, vous reconnaîtrez la construction de la droite projective. Il faut donc faire sur le bord de ma demi-sphère l'identification de deux points opposés. La bête obtenue a une sale tête, les plus masochistes pourront tenter de l'imaginer en recollant par le bord un disque avec un ruban de Möbius. On peut aussi construire le plan projectif en essayant de comprendre comment on peut recoller deux points diamétralement opposés de la sphère comme on l'a fait pour le cercle, mais c'est encore plus pervers.

Dans l'exemple précédent, on peut remplacer les droites passant par l'origine par les plans passant par l'origine, on obtient un espace qui s'appelle la grassmannienne d'indices $(3, 2)$: 3 c'est pour la dimension de l'espace ambiant et 2 pour la dimension des sous-espaces qui contiennent l'origine. Mon plan projectif est donc la même chose que la grassmannienne d'indice $(3, 1)$ et ma droite projective que la grassmannienne d'indices $(2, 1)$. je peux aussi augmenter la dimension de l'espace ambiant pour avoir des indices comme $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(3487, 786)$... la grassmannienne d'indice $(n, 1)$, qui classifie donc les droites passant par l'origine dans un espace de dimension n, est appelée l'espace projectif de dimension n.

Ces espaces projectifs sont historiquement apparus par l'étude de la perspective. Hormis la construction que je viens de donner et qui est technique, il existe une description plus intuitive de ces espaces. Le plan projectif, par exemple, peut se comprendre à partir du plan classique en remarquant d'abord que deux droites se coupent toujours en un point sauf si elles sont parallèles ; si on trace deux droites au hasard sur un plan on voit qu'il y a peu de chance qu'elles soient parallèles, ça veut dire que les exceptions à la règle deux droites se coupent en un point sont rares, or ce genre d'exception ne plait pas beaucoup aux mathématiciens qui préfèrent de belles lois toujours vraies (c'est un luxe qu'on peut s'offrir en maths alors autant profiter). Pour rendre cette règle toujours vraie, on va donc ajouter des points au plan et décider que deux droites parallèles se coupent sur un des ces nouveaux points. où sont ces points ? Là on a été malin : si on a deux droites qui se croisent et qu'on les rend parallèles, le point d'intersection va s'éloigner de plus en plus, et on dira que, quand les droites sont parallèles, il est à l'infini ! on va donc considérer que ces nouveaux points du plan sont à l'infini. Si on dit que deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont la même direction, il y a exactement un point à l'infini pour chaque direction. On peut comprendre ça en regardant un plan en perspective, les droites qui sont parallèles (comme les bords d'une route ou les rails d'un train) semblent effectivement se croiser à l'infini. Cette représentation montre aussi que ces points à l'infini forment une droite (l'horizon). Morale : le plan projectif c'est le plan classique auquel on a ajouté une droite à l'infini. dans ce plan, il est toujours vrai que deux droites se croisent, et c'est cool.

Aussi, un phénomène intéressant veut que les grassmanniennes d'indices $(n, 1)$ et $(n, n-1)$

soient les mêmes. On peut comprendre ça facilement dans le cas des indices $(3,1)$ et $(3,2)$: la donnée d'un plan ou d'une droite passant par l'origine est la même chose car à un plan on peut associer la droite orthogonale passant par l'origine et réciproquement. Plus généralement, un raisonnement analogue montre que les grassmanniennes d'indices (n,p) et $(n,n-p)$ sont les mêmes. Les grassmanniennes ne sont pas vraiment reliées à des jolis problèmes comme la perspective mais comme les droites, plans et autres espaces plats (voir le billet précédent) sont les objets de base du jeu de la géométrie (parce que ce sont les objets les plus simples), on se retrouve souvent à les utiliser.

Je suis fatigué et je finis en mentionnant l'un des espaces de modules les plus étudiés : celui des courbes elliptiques, qui sont, je me sens malin de le dire, certaines courbes du plan. cet espace est notamment derrière les bien-connus-pour-être-célèbres travaux de Wiles sur le dernier théorème de Fermat.

Les espaces de modules – 3. à quoi ils servent Alors quel est l'intérêt des mathématiciens à construire ces espaces de modules et à les étudier ? Et puis, qu'est-ce que ça veut dire étudier un bazar pareil ? Je disais dans un autre billet que l'activité du géomètre moderne consiste à décrire des espaces qu'il ne peut pas dessiner ou se représenter visuellement parce qu'ils ont une trop grande dimension. Néanmoins, une induction sur les exemples en basses dimensions suggère que ces espaces invisibles doivent avoir des formes différentes les uns des autres, il y a donc un défi intellectuel à inventer des méthodes pour se les représenter et les comparer entre eux. Or, la plupart des systèmes intéressants ayant plus de 3 degrés de libertés, les espaces de modules sont des exemples naturels où le mathématicien peut appliquer et développer ses techniques d'appréhension des grandes dimensions.

Ceci dit, l'étude d'un espace mathématique est rarement gratuite, il y a généralement derrière un résultat important lié à une structure de l'espace. Par exemple, le problème de savoir combien de courbes d'un type donné passent par tant de points donnés dans la plan (par deux points passe une seule droite, par trois points un seul cercle...) se résout par des formules faisant appel à une structure particulière de l'espace des modules des courbes du plan que, pour ne pas me perdre dans trop de détails, je décrirais comme le 'bord' de l'espace des modules (les curieux pourront chercher des références sur la théorie de Gromov-Witten).

Autre exemple, c'est pour prouver les conjectures de Weil, provenant de la théorie des nombres, que Grothendieck a imaginé de nouvelles technologies pour décrire et étudier les espaces : les topos et le spectre étale. Les topos sont une notion de continuum dont la définition est directement issue de la philosophie des espaces de modules : un topos est un espace défini par l'ensemble des (ensembles de) choses qu'il peut paramétrer. L'application la plus connue consiste à associer à un anneau son spectre qui est l'espace des modules de toutes les localisations de cet anneau. Je n'explique pas plus, il suffit de savoir que les spectres sont un truc de transformer certains objets de l'algèbre en des espaces, ça permet d'utiliser l'intuition et le langage géométrique pour comprende l'algèbre, c'est super malin (et c'est parmi mes gadgets préférés).

Autre exemple, encore, il se trouve que les grassmaniennes dont je parlais dans le billet précédent fournissent des approximations pour l'espace des modules de fibrés vectoriels. Je ne vais pas expliquer ce que sont les fibrés vectoriels parce que ça serait plus ennuyeux que du cinéma français, il suffit de savoir que ce sont des objets qui ont été inventés pour étudier l'infiniment petit et qui apparaissent naturellement lorsqu'on fait des équations différentielles ; ils trouvent donc beaucoup d'applications en physique et sont au géomètre moderne ce que le malt est à la bière. Et pour ceux qui connaissent, la structure de leurs espaces de modules sont liés à la notion de classes caractéristiques, qui sont des (sortes de) nombres qui décrivent les fibrés vectoriels.

Un dernier exemple d'espace de modules est celui classifiant les modèles d'une théorie logique (qui est aussi un exemple d'application des topos). Ces espaces de modules sont très utiles pour comprendre des problèmes comme l'indépendance de l'hypothèse du continu ou les bien-connus-pour-être-célèbres théorèmes de Gödel. À son époque, Gödel n'avait pas à sa disposition cette technologie, mais la formulation moderne de la logique en termes de topos permet de comprendre agréablement les choses en introduisant une intuition géométrique.

J'arrête-là, chacune de ces situations demanderait de longues explications et je dois ennuyer tout le monde à parler de choses sans les expliquer. Mais, physique mathématique, topologie, géométrie différentielle, théorie des nombres, logique... les espaces de modules sont absolument partout en maths et c'est ce que je voulais illustrer.

En outre, mon but à écrire ainsi n'est pas d'expliquer ce que font les mathématiciens mais de montrer que leurs idées les plus récentes et les plus élaborées sont en fait des idées simples qui s'illustrent aussi dans l'expérience de tout le monde. Ce qu'il faut retenir lorsqu'on n'est pas mathématicien c'est :

1. l'invention des espaces de modules comme la forme contenant toute les variations possible d'un système (avec Kant, on devrait dire la 'forme a priori')
2. que les espaces de grandes dimensions sont faciles à construire et donc à comprendre en principe (mais pas à étudier, ça c'est toujours dur)
3. et que penser un système dans la diversité de ses degrés de liberté (le mathématicien dirait 'à travers ses modules') est toujours intelligent.

Je ne vais pas élaborer longtemps sur ce dernier point, il me paraît assez clair en soi. On peut trouver des exemples simple où plusieurs dimensions existent, il suffit de penser à l'échiquier politique. Traditionnellement on représente les partis politiques sur une ligne (en fait l'arc de cercle des sièges parlementaires), il y a la gauche et la droite et le centre et les extrêmes. Il est sûr que cette division des choses reflète une certaine réalité, mais elle la simplifie aussi : comment penser les partis écologistes dans cet alignement ?

Le critère que je comprends pour faire la différence entre droite et gauche est le rôle plus ou moins régulateur de l'économie et des services que les partis veulent donner à l'état. Mais cela crée déjà deux degrés de liberté : je peux être pour une économie libre ou pas et je peux reconnaître plus ou moins de prérogatives à l'état, il y a une certaine indépendance entre les deux notions. L'alignement unidimensionnel de l'échiquier politique est donc simplificateur de ces positions. d'autant que l'écologie vient créer une dimension supplémentaire.

Bref, je n'ai rien de bien malin à dire sur tout ça. Mais je peux dire que trouver les degrés de liberté (qui sont reliés en politique à ce que les analystes appellent les clivages) est toujours une bonne idée pour comprendre un système. Il y a un espace politique, il n'est clairement pas unidimensionnel (mais ne me demandez pas combien de dimension il a !) et on devrait encourager l'utilisation d'une vraie description politique multidimensionnelle. Il faudrait pour cela trouver une bonne métaphore spatiale (une rose des vents avec ses est-ouest-nord-sud ? L'espace 3D usuel avec ses bas-haut-droit-gauche-devant-derrière ?) peut-être faudrait-il inventer tout un vocabulaire. en tout cas, le trouver reviendrait à trouver une meilleure approximation de l'espace (de modules) politique.[1]

1. Une remarque : dans ma comparaison entre espace politique et espace mathématique, il ne faut sur-

Ce n'est absolument pas un hasard si, pour comprendre la politique, on utilise un vocabulaire spatial ; la démarche qui utilise un vocabulaire spatial en politique et la démarche qui construit les espaces de modules en mathématiques sont identique dans leur forme et se fondent sur cette idée de considérer comme un tout (ontologiser diraient les philosophes) l'ensemble de toutes les variations possibles d'un système. Il y a en fait une intuition commune de la spatialité derrière ces deux espaces. On se déplace dans l'un comme on se déplace dans l'autre. Les cogniticiens parlent "d'espaces sémantiques" pour désigner ces espaces "non physiques" (Deleuze parlait "d'espaces pré-extensifs") et les IRM révèlent que les mêmes réseaux neuronaux sont mis en œuvre pour s'orienter dans ces deux types d'espace.

Philosophiquement, la structure de cette démarche est liée à la théorie kantienne et j'espère trouver le courage d'en parler dans un prochain billet. Je pense que la réflexion kantienne touche la nature profonde des mathématiques et l'exemple de la notion d'espace de modules illustre cela. Contrairement à ce qu'on pense trop souvent les mathématiques ne sont pas derrière les choses du monde, elles sont plaquées dessus. Et le rêve qui consiste à trouver des équations pour tout est une illusion créée par cette erreur : les choses de ce bas monde ne sont pas mathématiques, elles sont mathématisables ! (Et encore seulement les plus simples d'entre elles.)

Je vous laisse méditer sur cette subtile différence.

---

tout pas lire une proposition de mathématiser la politique ; c'est évidemment impossible et la théorie des catastrophes, qui avait des ambitions comparables, a relativement échouée. Je veux simplement souligner la présence intrinsèque de la spatialité dans la politique.