

# Pourquoi les catégories supérieures sont-elles utiles ?

Mathieu Anel

ERC project Philosophy of Canonical Quantum Gravity  
Laboratoire SPHERE - UMR 7219  
CNRS - Université Paris Diderot

—

3 février 2017

Exposé au séminaire Catégories supérieures, polygraphes et homotopie

# Avertissement

Je ne parlerai que des  $(\infty, 1)$ -catégories, c'est-à-dire de catégories supérieures ayant seulement des 1-flèches non-inversibles. Je les appellerai simplement des  $\infty$ -catégories.

Cette restriction est importante pour la manipulation de la théorie car, en un sens, la théorie  $(\infty, 1)$ -catégories est la même que celle des catégories. La différence est seulement sémantique.

(J'y reviendrai).

# Avertissement

Je n'utiliserai aucun modèle particulier de la théorie des  $(\infty, 1)$ -catégories.

Quasi-catégories, catégories de Segal, de Rezk, de Batanin, de Grothendieck-Maltsiniotis... sont à oublier pour ce que je vais dire.

Je vais me contenter d'utiliser intuitivement les catégories supérieures.

# Abréviations

TC = Théorie des Catégories

TCS = Théorie des Catégories Supérieures  
= théorie des  $(\infty, 1)$ -catégories

# But de l'exposé

Je voudrais illustrer **deux axiomes pour une catégorie** qui n'ont aucun modèle non-trivial en TC mais qui en ont beaucoup en TCS :

1. **l'effectivité des colimites**
2. **la stabilité.**

On verra que le premier est une forme forte de l'axiome d'**univalence** en TT. Il est aussi lié aux topos supérieurs.

Le second est motivé par l'algèbre homologique.

Je finirai par quelques considérations plus philosophiques.

## I – Effectivité des colimites

# Effectivité des colimites

On commence dans les 1-catégories.

Pour introduire la propriété d'effectivité des colimites, on commence par rappeler ce que cela veut dire dans le cas

- ▶ des relations d'équivalence
- ▶ et des actions de groupes où la notion a à voir avec les méthodes dites "équivariantes".

## Effectivité des relations d'équivalence

On se place dans une catégorie  $\mathcal{C}$  avec limites et colimites finies.

Soit  $R$  une relation d'équivalence sur un objet  $X$

$$R \rightrightarrows X \times X.$$

Soit  $Q = X/R$  et  $X \rightarrow Q$  le morphisme quotient. On considère la relation d'équivalence "avoir la même image dans le quotient".

Elle est donnée par

$$X \times_Q X \rightrightarrows X \times X.$$

On a toujours la comparaison canonique

$$R \rightrightarrows X \times_Q X \rightrightarrows X \times X.$$

On dit que  $R$  est **effective** si  $R \simeq X \times_Q X$ .



## Effectivité des relations d'équivalence

Une relation est effective s'il est équivalent de dire que deux éléments sont en relation ou qu'ils ont même image dans le quotient.

Dans les ensembles, toute relation d'équivalence est effective. C'est en fait vrai dans tout topos (c'est l'un des axiomes de Giraud).

Mais ce n'est pas le cas dans les espaces topologiques séparés : si  $\mathbb{Q}$  muni de la topologie induite par  $\mathbb{R}$  agit par addition sur  $\mathbb{R}$ , la relation

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

a pour quotient un seul point. La relation "avoir même image dans le quotient" est donc la relation d'équivalence totale.

# De l'équivariance à l'effectivité

On considère maintenant l'effectivité des actions de groupe.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie avec produits fibrés et colimites.

On peut y définir un objet en **groupe**  $G$ , une **action** de  $G$  sur un objet  $X$  et son **quotient**  $Q$ .

Cette donnée définit un **diagramme simplicial augmenté**

$$\dots \quad G \times G \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} G \times X \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} X \longrightarrow Q$$

$Q$  est la colimite du reste du diagramme.

## De l'équivariance à l'effectivité

Un objet  $Y \rightarrow Q$  définit par pullback un morphisme cartésien de diagrammes :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & G \times G \times E & \rightrightarrows & G \times E & \rightrightarrows & E & \longrightarrow & Y \\ & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \dots & G \times G \times X & \rightrightarrows & G \times X & \rightrightarrows & X & \longrightarrow & Q. \end{array}$$

Le diagramme du haut décrit une action de  $G$  sur un objet  $E = Y \times_Q X$ .

Le morphisme de diagrammes décrit un **morphisme  $G$ -équivariant**  $E \rightarrow X$ .

## De l'équivariance à l'effectivité

Soit  $\mathcal{C}^G$  la catégorie des actions de  $G$  et morphismes équivariants.

L'analyse précédente produit un foncteur

$$\text{cst} = - \times_Q X : \mathcal{C}/Q \longrightarrow \mathcal{C}^G/X.$$

Ce foncteur est en fait adjoint à droite du foncteur "quotient de l'action"

$$\mathcal{C}/Q \begin{array}{c} \xleftarrow{-/G} \\ \xrightarrow{\text{cst}} \end{array} \mathcal{C}^G/X.$$

On dit qu'une action  $G$  sur  $X$  **permet de travailler de manière équivariante** si cette adjonction est une équivalence de catégories.

# De l'équivariance à l'effectivité

Travailler de manière équivariante est important dans beaucoup de situations.

- ▶ En **topologie**, pour prouver que  
faisceaux/fibrés équivariants sur  $X$   
= faisceaux/fibrés sur  $X/G$ .
- ▶ En **topologie algébrique**, pour prouver que  
cohomologie équivariante de  $X$   
= coh. de l'espace classifiant  $X//G$ .
- ▶ En **géométrie différentielle**, pour prouver que  
forme différentielle basique et invariante sur  $X$   
= forme diff. sur  $X/G$ .
- ▶ En **logique**, pour construire des univers univalents.
- ▶ ...

# De l'équivariance à l'effectivité

Pouvoir travailler de manière équivariante est équivalent aux deux conditions suivantes :

1. le foncteur  $cst$  est pleinement fidèle  
 $\iff Y$  est le quotient  $(Y \times_Q X)/G$   
(on dira que le **quotient (ou l'action) est universel(le)**)
2. le foncteur  $-/G$  est pleinement fidèle  
 $\iff E$  se reconstitue comme  $(E/G) \times_Q X$   
(on dira que **l'action est effective**).

## De l'équivariance à l'effectivité

Plus généralement, plutôt que des actions de groupes (qui correspondent à certains diagrammes simpliciaux) on peut considérer des  $I$ -diagrammes dans  $\mathcal{C}$ .

On note  $\mathcal{C}_{\text{cart}}^I$  la catégorie des  $I$ -diagrammes et morphismes cartésiens.

Pour tout diagramme  $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ , de colimite  $|X|$ , on a une adjonction

$$\mathcal{C}/|X| \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{colim}_I} \\ \xrightarrow{\text{cst}_I} \end{array} \mathcal{C}_{\text{cart}}^I/X.$$

où

$$\text{cst}_I(Y \rightarrow |X|)_i = Y \times_{|X|} X_i.$$

## De l'équivariance à l'effectivité

$$\mathcal{C}/|X| \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{colim}_I} \\ \xrightarrow{\text{cst}_I} \end{array} \mathcal{C}'_{\text{cart}}/X$$

1. On dit que **les  $I$ -diagrammes sont universaux** si, pour tout  $X$ , le foncteur  $\text{cst}_X$  est pleinement fidèle.  
Cela signifie que, pour tout  $Y \rightarrow |X|$ ,

$$Y = \text{colim}_I (Y \times_{|X|} X_i).$$

2. On dit que **les  $I$ -diagrammes sont effectifs** si, pour tout  $X$ , le foncteur  $\text{colim}_I$  est pleinement fidèle.  
Cela signifie que, pour tout  $E \rightarrow X$ ,

$$E_i = (\text{colim}_I E_i) \times_{|X|} X_i.$$



# De l'équivariance à l'effectivité

Questions :

- ▶ quelles sont les catégories où les actions de groupe sont **universelles** ?
- ▶ quelles sont les catégories où tous les diagrammes sont **universaux** ?

Ce sont essentiellement les **catégories cartésiennes fermées** (cocomplètes).

# De l'équivariance à l'effectivité

Questions :

- ▶ quelles sont les catégories où les actions de groupe sont **effectives** ?
- ▶ quelles sont les catégories où tous les diagrammes sont **effectifs** ?

La catégorie ponctuelle.

Aucune catégorie non-triviale n'admet des colimites effectives !

Il est impossible de travailler de manière équivariante dans les catégories.

C'est une des raisons les plus importantes qui ont motivé la poursuite des catégories supérieures.

# De l'équivariance à l'effectivité

Remarque 1 – Si on se limite aux **quotients de relations d'équivalences** (qui sont les colimites de certains diagrammes)

- ▶ quelles sont les catégories où les relations d'équivalences sont **universelles** ?
- ▶ quelles sont les catégories où les relations d'équivalences sont **effectives** ?

Ce sont les catégories exactes au sens de Barr.

En particulier les topos.

Remarque 2 – Les actions libres de groupes sont des cas particuliers de relations d'équivalence. Elles sont donc effectives dans les catégories exactes et les topos. Le problème vient des actions non-libres (voir plus bas).

## De l'équivariance à l'effectivité

Le contre-exemple de Rezk : les pushouts ne sont pas effectifs dans les ensembles (et dans tous les topos).

On fixe le pushout  $X = 1 \longleftarrow 1 \coprod 1 \longrightarrow 1$ .

On considère l'ensemble  $2 = \{0, 1\}$ , muni de sa symétrie  $\sigma$  permutant 0 et 1. On définit un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \xleftarrow{(id, id)} & 2 \coprod 2 & \xrightarrow{(id, \sigma)} & 2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \xleftarrow{\quad} & 1 \coprod 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array}$$

Le pushout du bas donne 1 et celui du haut donne  $2/\sigma = 1$ . Les colimites sont isomorphes sans que les diagrammes ne le soit, c'est impossible si les pushouts sont effectifs.

## Analyse de la situation

Revenons à l'étude d'une action de  $G$  sur  $X$  de quotient  $Q$

Le problème de l'effectivité se ramène en fait à comprendre pourquoi le morphisme canonique

$$G \times X \rightarrow X \times_Q X$$

n'est pas toujours un isomorphisme.

Or, la fibre de ce morphisme en une paire  $(x, y)$  identifiée dans le quotient est l'ensemble des éléments  $g \in G$  tels que

$$gx = y.$$

Le morphisme sera un isomorphisme seulement lorsque  $g$  est unique, c'est-à-dire lorsque l'action est libre.

L'obstruction à l'effectivité est donc la multiplicité des relations identifiant deux éléments.

# Analyse de la situation

Morale : c'est la notion de classique de quotient qui est mauvaise.

Il faut une notion de quotient qui retient la possible multiplicité (l'ambiguïté) des identifications.

C'est la notion de quotient (ou colimite) homotopique.

On va changer le calcul du quotient  $Q$  pour forcer l'équation

$$G \times X = X \times_Q X.$$

# Colimite homotopique

Plaçons-nous dans les ensembles.

L'idée pour construire une colimite homotopique est très simple.

1. Cette limite ne sera pas un ensemble, mais un **ensemble simplicial** (qu'on regardera à homotopie près, c'est-à-dire que ce sera en fait un **type d'homotopie** ou un  $\infty$ -groupeïde).
2. La construction de cet ensemble simplicial procède ainsi :
  - ▶ pour chaque identification entre deux éléments, on met un **intervalle** entre eux,
  - ▶ pour chaque identification entre trois éléments, on met un **triangle** entre eux,
  - ▶ pour chaque identification entre  $n + 1$  éléments, on met un  **$n$ -simplexe** entre eux.

La colimite classique se retrouve en prenant l'ensemble des composantes connexes.

# Colimite homotopique

Plus formellement, la colimite homotopique d'un diagramme

$$I \rightarrow \text{Ens}$$

est simplement le **nerf de ce diagramme** (nerf de la catégorie des éléments).

En particulier, le nerf du diagramme constant de valeur  $\{*\}$  est simplement le nerf de la catégorie  $I$ .

Parfois la colimite homotopique est un ensemble (type d'homotopie sans homotopie supérieure) et on dit que la colimite "était la bonne" ou "n'a pas besoin d'être dérivée". C'est le cas des quotients de relations d'équivalence dans les ensembles,

Mais comme tout type d'homotopie est le nerf d'une catégorie, cela prouve que les colimites homotopiques peuvent être très non-triviales (= ne pas être des ensembles).



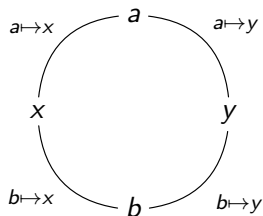
# Colimite homotopique – Exemple 1

On considère le pushout

$$\{x\} \longleftarrow \{a, b\} \longrightarrow \{y\}$$

dont la colimite classique est un point.

Sa colimite homotopique a 4 sommets (indexés par les 4 éléments)  
et 4 arêtes (indexées par les 4 flèches entre éléments)



C'est un **cercle**. Comme il est connexe, on retrouve bien que le quotient classique est un point.

# Colimite homotopique – Exemple 1

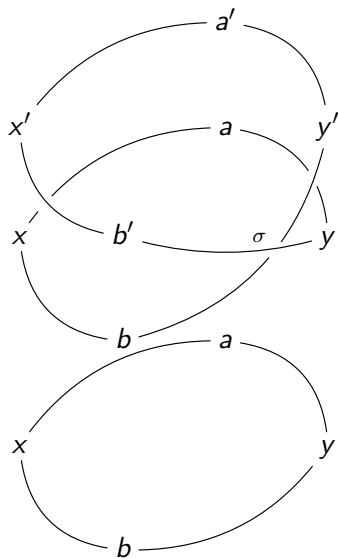
Vérifions que cette notion de colimite est effective.

On reprend le morphisme cartésien précédent

$$\begin{array}{ccccc} \{x, x'\} & \xleftarrow{(id, id)} & \{a, a'\} \amalg \{b, b'\} & \xrightarrow{(id, \sigma)} & \{y, y'\} & & Y \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \{x\} & \xleftarrow{\quad} & \{a, b\} & \xrightarrow{\quad} & \{y\} & & X \end{array}$$

La colimite du bas est donc un cercle. Celle d'en haut donne aussi un cercle, mais, à cause de la permutation  $\sigma$ , formant un revêtement de degré 2 du cercle du bas.

# Colimite homotopique – Exemple 1



# Colimite homotopique – Exemple 1

On a un morphisme canonique  $\{x\} \rightarrow |X|$ .

L'effectivité nous dit qu'on doit avoir

$$\{x\} \times_{|X|} |Y| = \{x, x'\}.$$

C'est-à-dire que la fibre de  $|Y| \rightarrow |X|$  en  $x$  est  $\{x, x'\}$ . On constate que c'est bien le cas.

On vérifie de même les autres conditions.

## Colimite homotopique – Exemple 2

Un autre exemple est la colimite homotopique de l'action triviale de  $G$  sur un point.

Le calcul montre que cela construit le nerf de  $G$  qui est un modèle bien connu pour le type d'homotopie  $BG$  ayant la propriété d'être connexe, d'avoir  $G$  comme  $\pi_1$  et aucune homotopie supérieure ([espace classifiant](#) de  $G$ ).

## Colimite homotopique = $\infty$ -colimite

La colimite homotopique construit un foncteur

$$\text{hocolim} : \text{Ens}' \longrightarrow \mathcal{S}$$

où  $\mathcal{S}$  est l' $\infty$ -catégorie des types d'homotopie.

Ce foncteur est simplement la **restriction du foncteur d' $\infty$ -colimite** sur les diagrammes de types d'homotopie

$$\infty\text{-colim} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}$$

le long de l'inclusion  $\text{Ens} \rightarrow \mathcal{S}$ .

Autrement dit, pour mieux comprendre la colimite homotopique, il suffit de se placer dans les  $\infty$ -catégories.

# Exemples de catégories supérieures

- ▶ L' $\infty$ -catégorie  $\mathcal{S}$  des types d'homotopie.
- ▶ L' $\infty$ -catégorie  $\mathcal{S}^I$  des diagrammes de types d'homotopie où  $I$  est une  $\infty$ -catégorie,
- ▶ En particulier, l' $\infty$ -catégorie  $Pr(C) = \mathcal{S}^{C^{op}}$  de préfaisceaux à valeurs dans les types d'homotopie.
- ▶ Toute catégorie enrichie sur les espaces ou les ensembles simpliciaux (notamment les localisations de Dwyer-Kan) induit une  $\infty$ -catégorie.
- ▶ Par exemple, la localisation de la catégorie des complexes de chaînes pour les quasi-isomorphismes,
- ▶ ou celle de la catégorie des dg-algèbres pour les quasi-isomorphismes,
- ▶ ou l' $\infty$ -catégorie des spectres (= th. cohomologiques),
- ▶ ...

# Effectivité et $\infty$ -topos

L'effectivité est une condition essentielle de la notion d' $\infty$ -topos.

Une  $\infty$ -catégorie  $\mathcal{E}$  est un  $\infty$ -topos ssi

1. elle est présentable
2. toutes les **colimites sont universelles** (= catégorie loc. cart. fermée)
3. et toutes les **colimites sont effectives**.

Par rapport à la définition classique, le dernier axiome remplace l'effectivité des seules relations d'équivalences (équivalent à l'existence du classifiant des sous-objets). Il peut-être prouvé équivalent à l'existence d'un **univers univalent** (Gepner-Kock).

Il faut remarquer que **la définition d' $\infty$ -topos est plus simple que celle d'un topos classique.**



## Effectivité et $\infty$ -topos

Comme l'effectivité des colimites est impossible en TC, la notion d' $\infty$ -topos n'a que la catégorie ponctuelle comme modèle en TC ! Cela veut dire que la notion d' $\infty$ -topos est différente de celle des topos : **un topos n'est pas un cas particulier d' $\infty$ -topos.**

Mais ils ont des modèles non-triviaux dans les  $\infty$ -catégories (qui prouvent que l'axiome d'effectivité est consistant) :

1. L' $\infty$ -catégorie  $\mathcal{S}$  des espaces est un  $\infty$ -topos.
2. Également toutes les  $\infty$ -catégories  $\mathcal{S}'$  de diagrammes (ou préfaisceaux) dans  $\mathcal{S}$  (en particulier l' $\infty$ -topos libre  $\mathcal{S}[X] = \mathcal{S}^{\mathcal{S}^{\text{fin}}}$ ).
3. Toutes les localisations exacte à gauche de  $\infty$ -catégories de préfaisceaux.
4. En particulier, l' $\infty$ -catégorie des spectres paramétrés est un  $\infty$ -topos (loc. lex. de  $\mathcal{S}[X]$ )
5. ...

# Effectivité et Univalence

Pratiquement, l'effectivité sert à construire des classifiants  $BG$  pour tout groupe  $G$  (comme colimite du nerf du groupe) ayant la bonne propriété (être connexe et tel que les lacets redonnent le groupe).

Cette construction appliquée au groupe  $Aut(X)$  des automorphismes d'un objet  $X$ , pour tout objet  $X$ , permet de construire un univers univalent

$$\mathbb{U} = \coprod_X BAut(X).$$

# Effectivité et Théories

L'effectivité de toutes les colimites dans les topos, se trouve être équivalente (sous les autres axiomes) à l'**effectivité des quotients de groupoïdes** (de Segal). Sans s'attarder sur cette notion qui généralise les relations d'équivalence, disons seulement que les topos ne sont pas les seules  $\infty$ -catégories où les quotients de groupoïdes sont effectifs.

Soit  $\mathbb{T}$  une théorie de Lawvere et  $\mathcal{E}$  un  $\infty$ -topos, alors la catégorie  $\mathcal{E}^{\mathbb{T}}$  des modèles de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathcal{E}$  admet des quotients de groupoïdes effectifs. (C'est une csq du thm de monadicité de Lurie.)

# Effectivité et Théories

Exemples.

- ▶ L' $\infty$ -catégorie des **complexes de chaînes** (positifs ou non-bornés).
- ▶ L' $\infty$ -catégorie des **anneaux simpliciaux** (ou sur un corps de caractéristique nulle, celle des dg-algèbres en degrés homologiques positifs).
- ▶ L' $\infty$ -catégorie des **spectres** (au sens de la TA).
- ▶ ...

L'**effectivité des groupoïdes**, en tant qu'elle permet de construire des classifiants de groupes, est la propriété qui est **secrètement derrière toutes les cohomologies** (celles des espaces, mais aussi celles des théories algébriques (André-Quillen, Hochschild, Lie...)).

## II – Stabilité

# Stabilité

On va maintenant s'intéresser aux propriétés d'objets dans une catégorie (1-catégorie ou  $\infty$ -catégorie).

Dans une catégorie  $\mathcal{C}$  avec limites et colimites finies, on considère les objets pointés  $1 \rightarrow X$  et on définit les lacets et la suspension de  $X$  par les diagrammes d'objets pointés :

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & \llcorner & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

On se demande s'il est possible de trouver un  $X$  tel que

$$\Omega \Sigma X = X.$$

# Stabilité

## Réponses

- ▶ Dans les ensembles ou un 1-topos, où n'importe quelle 1-catégorie, il n'y a que  $X = 1$  comme solution.
- ▶ Dans n'importe quelle 1-catégorie, il n'y a que  $X = 1$  comme solution.
- ▶ Dans l' $\infty$ -catégorie  $\mathcal{S}$ , il n'y a aussi que  $X = 1$  comme solution.
- ▶ Dans l' $\infty$ -catégorie des **complexes de chaînes** (non-bornés) tous les objets vérifient cette équation (car lacets et suspension s'interprètent comme le décalage des degrés dans un sens ou dans l'autre).
- ▶ Dans certains  $\infty$ -topos, il y a des solutions non-triviales (spectres paramétrés).

# Stabilité

La condition précédente revient à imposer que le diagramme suivant (décrivant la suspension de  $X$ )

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

qui est toujours cocartésien, soit aussi cartésien. On dit qu'il est bicartésien.



# Stabilité

On dit qu'une catégorie est **stable** si

1. elle est pointée,
2. elle possède les limites et colimites finies,
3. et si tout carré commutatif

est cocartésien ss'il est cartésien.

Exemples :

- ▶ l' $\infty$ -catégorie des complexes de chaînes,
- ▶ l' $\infty$ -catégorie des spectres.

# Stabilité & algèbre homologique

Comment la stabilité permet-elle de retrouver l'algèbre homologique ?

Simplement par le fait que : la **truncation 1-catégorique (en tuant les flèches supérieures)** d'une catégorie stable est triangulée.

Les triangles  $X \rightarrow Y \rightarrow Z$  sont les images des carrés cocartésiens (= carré cartésien = carrés bicartésiens)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z \end{array} \quad \lrcorner$$

On dit aussi que  $Z$  est la **cofibre** de  $X \rightarrow Y$ .

# Stabilité & algèbre homologique

Le difficile **axiome de l'octaèdre** est une conséquence triviale de l'existence du diagramme (construit par pushouts successifs)

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C(f) & \longrightarrow & C(gf) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & C(g). \end{array}$$

Dans ce diagramme  $C(f)$  désigne la cofibre du morphisme  $f$ . Par construction, les carrés supérieurs ainsi que le rectangle vertical à droite sont cocartésien, on en déduit facilement que le carré du bas est cocartésien. C'est cette dernière propriété qui implique l'axiome de l'octaèdre.

## III – Conclusion

# TC v. TCS

Effectivité des colimites (ou des groupoïdes) et stabilité sont deux propriétés qui peuvent se formuler dans la TC mais qui n'ont **aucun modèle dans la TC**.

Cela prouve que **le langage de la TC dépasse sa sémantique usuelle** en termes de 1-catégories. C'est à la fois banal (parce qu'on est habitué à ça en logique) et bouleversant (parce qu'on imaginait pas ça possible avec les catégories).

**Le langage de la TC est aussi celui des  $(\infty, 1)$ -catégories.**

# TC v. TCS

La situation est comparable au fait, plus connu car popularisé par la HoTT, que le langage de l'égalité n'est pas que le langage des ensembles mais aussi celui des  $\infty$ -groupoïdes :

égalité = identité

mais aussi

égalité = chemin dans un espace.

Cette nouvelle sémantique a permis de comprendre pourquoi la TT de Martin-Löf ne permettait pas de prouver certains résultats évidents dans la sémantique classique (p.ex. l'extensionnalité des fonctions) : ils étaient faux dans d'autres sémantiques.

# TC v. TCS

Plus classiquement, la situation se compare aussi à la **révolution non-euclidienne** qui a permis de réaliser que **le langage de la géométrie avait plusieurs "sémantiques"** :

**droite** = droite du plan euclidien

mais aussi

**droite** = grand cercle sur une sphère.

Ce fut une grande révélation.

# TC v. TCS

La situation se compare aussi à la **révolution Lawverienne** qui a permis de réaliser que **le langage des ensembles avait plusieurs "sémantiques"** :

**ensemble** = ensemble

mais aussi

**ensemble** = objet d'une catégorie.

Ce fut aussi une grande révélation, qui donna un statut très profond à la TC : **la TC est la forme de la donation et de la manipulation des objets mathématiques** (ou, si on est plus prudent, seulement de *beaucoup* d'objets mathématiques).



# TC v. TCS

Ainsi, on a donc la double sémantique de la TC :

catégorie = 1-catégorie

mais aussi

catégorie =  $(\infty, 1)$ -catégorie.

Comme en géométrie et avec les ensembles, il y a quelque chose de fascinant dans cette émancipation de la TC.

# TC v. TCS

Naïvement, on pense la hiérarchie infinie des flèches d'une  $(\infty, 1)$ -catégorie comme faisant partie de sa structure. Mais il est remarquable que dans la pratique des  $(\infty, 1)$ -catégories, ces flèches supérieures ne jouent essentiellement aucun rôle structural, ou peut-on dire, syntaxique. Elles n'apparaissent que dans les propriétés des constructions catégoriques et non dans leurs définitions.

Autrement dit, il est possible de prendre le point de vue sur la TCS, où **les flèches supérieures ne font pas partie de la structure, mais seulement de la sémantique**. Cela revient à poser l'équation

$$\text{TC} = \text{TCS}.$$

# TC v. TCS

C'est ainsi que je comprends pourquoi les flèches supérieures n'apparaissent pas explicitement dans les modèles simpliciaux de la TCS (catégories simpliciales, quasicatégories, catégories/espaces de Segal).

La structure simpliciale est en fait engendrée par la seule combinatoire de l'intervalle, il n'y a pas d'intervalle supérieur.

Les modèles pour les  $(\infty, n)$ -catégories (multi-Segal spaces,  $\Theta_n$ -catégories...) rendent clair qu'il faut multiplier les niveaux simpliciaux pour avoir les flèches supérieures. Chaque niveau venant d'ailleurs avec sa propre hiérarchie de cohérences, qu'il faut ensuite unifier (transformer les cohérences de degré  $k$  des  $n$ -flèches en  $(n + k)$ -flèches).

Merci !